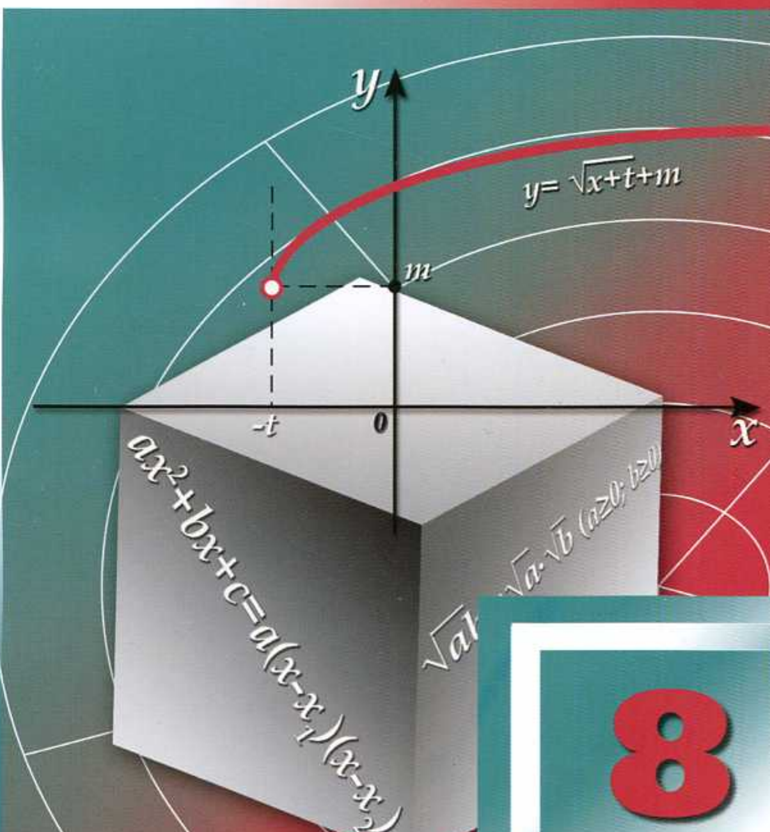
В ПОМОЩЬ ШКОЛЬНОМУ УЧИТЕЛЮ

А.Н. РУРУКИН, С.В. СОЧИЛОВ, Ю.М. ЗЕЛЕНСКИЙ

ПОУРОЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ

по АЛГЕБРЕ

К УМК А.Г. *Мордковича*



8 КЛАСС

В ПОМОЩЬ ШКОЛЬНОМУ УЧИТЕЛЮ

А. Н. РУРУКИН
С. В. СОЧИЛОВ
Ю. М. ЗЕЛЕНСКИЙ

ПОУРОЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ ПО АЛГЕБРЕ

к УМК
А.Г. Мордковича
(*М.: Мнемозина*)

8 класс

МОСКВА • «ВАКО» • 2010

УДК 337:167.1:51
ББК 74.262.21
Р87

Рурукин А.Н., Сочилов С.В., Зеленский Ю.М.

Р87 Поурочные разработки по алгебре: 8 класс. – М.: ВАКО, 2010. – 352 с. – (В помощь школьному учителю).

ISBN 978-5-408-00183-5

Издание представляет собой подробные поурочные разработки по алгебре для 8 класса к УМК А.Г. Мордковича (М.: Мнемозина) и содержит все, что необходимо педагогу для качественной подготовки к урокам: подробные поурочные планы, методические советы и рекомендации, творческие задания, самостоятельные, контрольные и зачетные работы с подробным разбором. Предлагаемый материал достаточен для проведения полноценных уроков в классах и группах различного уровня.

Пособие будет полезно как начинающим педагогам, так и преподавателям со стажем.

УДК 337:167.1:51
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-408-00183-5

Предисловие

Предлагаемое пособие представляет собой подробное поурочное планирование по алгебре для 8 класса общеобразовательных учреждений.

Данное пособие составлено для учебно-методического комплекта А.Г. Мордковича и др. (М.: Мнемозина) и рассчитано на 108 уроков (3 часа в неделю). Нумерация задач в поурочном планировании дана для задачника А.Г. Мордковича и др.

Каждый урок разбивается на ряд этапов.

I. Сообщение темы и цели урока (~1–2 мин). Учащимся кратко сообщается тема проводимого урока и цели, которые должны быть достигнуты: ознакомиться с новыми понятиями, сведениями, изучить способы решения типовых задач, отработать определенные навыки и т. д.

II. Повторение и закрепление материала (~15–18 мин) включает в себя **ответы по домашнему заданию** (~5 мин) как по теоретическим вопросам, так и разбор нерешенных задач. Это может быть сделано либо учителем, либо кем-то из школьников (желательно добровольно). Эта часть урока включает в себя и **контроль знаний** (~10–12 мин). Поурочные контрольные материалы представлены в виде тестов, письменных опросов и самостоятельных работ.

Тесты используются при контроле сравнительного простого материала, не требующего серьезных теоретических знаний или сложных способов решения.

Письменные опросы предусматривают ответы на теоретические вопросы, связанные с основными понятиями, сведениями и приемами решения задач, а также решение задач.

В **самостоятельные работы** включены более сложные задачи, требующие сравнительно серьезных усилий.

III. Изучение нового материала (основные понятия) (~10–15 мин). С помощью подсказок, примеров и наводящих вопросов учитель рассматривает новую тему. При этом желательно максимально активизировать работу учащихся – достигнутые знания усваиваются лучше сообщенных. Разумеется, изучение нового материала должно сопровождаться **решением задач по теме** (у доски, самостоятельно на месте и др.).

Помимо задач, приведенных в базовых учебниках, почти для каждого урока предлагаются **творческие задания**, которые требуют более высокой техники вычислений, отработанных навыков, логического мышления. В зависимости от уровня подготовки класса такие задачи могут быть использованы при работе в классе, в домашних заданиях, на факультативных занятиях.

В конце урока подводятся его **итоги** (~1–2 мин). Сообщается, какие цели урока достигнуты (что удалось сделать), проставляются оценки за ответы на уроке и за самостоятельную работу, записывается домашнее задание.

По прохождении темы предусмотрена **контрольная работа** в трех вариантах различной сложности. Уровень сложности определяется или учителем или самим учащимся. Для написания контрольной работы желательно использовать сдвоенный урок (80 мин), т. к. в 8 классе учащиеся еще не слишком собраны.

Также проводится **и зачетная работа**, в которую включено большее количество задач трех уровней сложности. Такая работа позволяет сравнить успехи учащихся в одинаковых условиях.

Собранный в пособии материал избыточен. Поэтому его можно использовать для дифференцированного обучения, факультативных занятий, проведения олимпиад и т. д. Пособие будет полезно в первую очередь начинающим учителям, которые могут использовать целиком изложенные уроки. Опытные учителя могут использовать предложенный материал частично, сообразуясь со своим опытом и планом. Разумеется, поурочные разработки являются ориентировочными и рассчитаны в основном на классы с высокой математической подготовкой.

В целом пособие составлено с целью оптимизировать подготовку учителя к уроку и сэкономить его время. Разумеется, предлагаемое планирование носит рекомендательный характер и не является догмой.

Тематическое планирование учебного материала для комплекта А.Г. Мордковича и др. «Алгебра–8»

Из расчета 3 ч в неделю, всего 108 ч в год

Глава 1. Алгебраические дроби (21 ч)

§ 1. Основные понятия (1 ч)

§ 2. Основное свойство алгебраической дроби (1 ч)

§ 3. Сложение и вычитание алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями (1 ч)

§ 4. Сложение и вычитание алгебраических дробей с разными знаменателями (2 ч)

Контрольная работа № 1 (2 ч)

Итоги контрольной работы (1 ч)

§ 5. Умножение и деление алгебраических дробей. Возведение алгебраической дроби в степень (2 ч)

§ 6. Преобразование рациональных выражений (2 ч)

§ 7. Первые представления о решении рациональных уравнений (2 ч)

§ 8. Степень с отрицательным целым показателем (2 ч)

Контрольная работа № 2 (2 ч)

Итоги контрольной работы (1 ч)

Зачетная работа по теме «Алгебраические дроби» (2 ч)

Глава 2. Функция $y=\sqrt{x}$. Свойства квадратного корня (18 ч)

§ 9. Рациональные числа (2 ч)

§ 10. Понятие квадратного корня из неотрицательного числа (1 ч)

§ 11. Иррациональные числа (1 ч)

§ 12. Множество действительных чисел (1 ч)

§ 13. Функция $y=\sqrt{x}$, ее свойства и график (2 ч)

§ 14. Свойства квадратных корней (2 ч)

§ 15. Преобразование выражений, содержащих операцию извлечения квадратного корня (2 ч)

§ 16. Модуль действительного числа, график функции $y=|x|$ (3 ч)

Контрольная работа № 3 (2 ч)

Итоги контрольной работы (1 ч)

Зачетная работа по теме «Функция $y=\sqrt{x}$. Свойства квадратного корня» (2 ч)

Глава 3. Квадратичная функция, функция $y=\frac{k}{x}$ (18 ч)

§ 17. Функция $y=kx^2$, ее свойства и график (2 ч)

§ 18. Функция $y=\frac{k}{x}$, ее свойства и график (2 ч)

§ 19. Как построить график функции $y=f(x+l)$, если известен график функции $y=f(x)$ (2 ч)

§ 20. Как построить график функции $y=f(x)+m$, если известен график функции $y=f(x)$ (1 ч)

§ 21. Как построить график функции $y=f(x+l)+m$, если известен график функции $y=f(x)$ (2 ч)

§ 22. Функция $y=ax^2+bx+c$, ее свойства и график (3 ч)

§ 23. Графическое решение квадратных уравнений (1 ч)

Контрольная работа № 4 (2 ч)

Итоги контрольной работы (1 ч)

Зачетная работа по теме «Квадратичная функция, функция $y=\frac{k}{x}$» (2 ч)

Глава 4. Квадратные уравнения (21 ч)

§ 24. Основные понятия (2 ч)

§ 25. Формулы корней квадратных уравнений (2 ч)

§ 26. Рациональные уравнения (2 ч)

§ 27. Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций (текстовые задачи) (3 ч)

§ 28. Частные случаи формулы корней квадратного уравнения (2 ч)

§ 29. Теорема Виета. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители (2 ч)

§ 30. Иррациональные уравнения (3 ч)

Контрольная работа № 5 (2 ч)

Итоги контрольной работы (1 ч)

Зачетная работа по теме «Квадратные уравнения» (2 ч)

Глава 5. Неравенства (21 ч)

§ 31. Свойства числовых неравенств (3 ч)

§ 32. Исследование функций на монотонность (2 ч)

§ 33. Решение линейных неравенств (2 ч)

§ 34. Решение квадратных неравенств (7 ч)

§ 35. Приближенные значения действительных чисел (1 ч)
§ 36. Стандартный вид числа (1 ч)
Контрольная работа № 6 (2 ч)
Итоги контрольной работы (1 ч)
Зачетная работа по теме «Неравенства» (2 ч)

Итоговое повторение (6 ч)

Итоговая контрольная работа (2 ч)

Подведение итогов обучения (1 ч)

Глава 1. Алгебраические дроби

§ 1. Основные понятия

Урок 1. Понятие алгебраической дроби и ее значения

Цель: рассмотреть алгебраическую дробь и основные понятия, связанные с ней.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

Начнем рассмотрение этой главы со следующей задачи.

Пример 1

Катер с собственной скоростью 12 км/ч прошел 14 км по течению реки и 20 км против течения, затратив на весь путь 3 ч. Найдите скорость течения реки.

По традиционной схеме приступим к решению модели.

Первый этап – составление математической модели.

Пусть x км/ч – скорость течения реки. Тогда по течению реки катер плывет со скоростью $(12 + x)$ км/ч, а против течения – со скоростью $(12 - x)$ км/ч. По течению реки (т. е. со скоростью $(12 + x)$ км/ч) катер прошел 14 км и затратил время $\frac{14}{12+x}$ ч. Против течения реки (т. е. со скоростью $(12 - x)$ км/ч) катер шел 20 км и затратил время $\frac{20}{12-x}$ ч. По условию задачи на весь путь (т. е. по течению и против течения) было затрачено 3 ч. Получаем уравнение: $\frac{14}{12+x}+\frac{20}{12-x}=3$. Составленное уравнение является математической моделью задачи.

Второй этап – работа с составленной моделью.

Обратите внимание на левую часть уравнения. Видим, что:

1) в уравнение входят алгебраические дроби $\frac{14}{12+x}$ и $\frac{20}{12-x}$ с разными знаменателями;

2) необходимо детальнее изучить алгебраические дроби, в частности, научиться их складывать;

3) в данный момент, не имея навыков работы с подобными дробями, далее решать задачу мы не в состоянии.

Поэтому давайте детально изучать алгебраические дроби. Напомним, что с понятием алгебраической дроби мы познакомились в 7-ом классе, где рассматривалось сокращение дробей.

Алгебраической дробью называют выражение вида $\frac{P}{Q}$, где P и Q – многочлены. При этом P – числитель, Q – знаменатель алгебраической дроби.

Пример 2

Выражения $\frac{a+2b}{a-b}$, $\frac{x^3+1}{x+1}$, $\frac{2a+3}{5}$ являются алгебраическими дробями. При этом дробь $\frac{x^3+1}{x+1}$ может быть записана в виде $\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}=x^2-x+1$ и фактически будет многочленом, а дробь $\frac{2a+3}{5}=\frac{2}{5}a+\frac{3}{5}=0{,}4a+0{,}6$ является двучленом.

Противоречия здесь нет. Так же как и в случае обыкновенных дробей, например, натуральное число 7 можно рассматривать в виде дроби $\frac{21}{3}$.

Чтобы найти **значение алгебраической дроби**, надо **подставить значения переменных**, входящих в дробное выражение (если это возможно).

Пример 3

Найдем значение алгебраической дроби $\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}$ при:

а) $a=2$, $b=1$;
б) $a=2$, $b=2$.

а) При $a=2$, $b=1$ получаем: $\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}=\frac{2^2-1^2}{2^2-2\cdot2\cdot1+1^2}=$ $=\frac{4-1}{4-4+1}=\frac{3}{1}=3$. При этом заметим, что вычисления были не рациональны, т. к. предварительно следовало сократить дробь, используя формулы сокращенного умножения: $\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}=$ $=\frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)^2}=\frac{a+b}{a-b}$. Теперь легко найти значение дроби: $\frac{a+b}{a-b}=\frac{2+1}{2-1}=\frac{3}{1}=3.$

б) При $a = 2$, $b = 2$ знаменатель данной дроби $a^2-2ab+b^2=$ $=2^2-2\cdot2\cdot2+2^2=4-8+4=0$. Но на нуль делить нельзя. Поэтому значения переменных $a = 2$, $b = 2$ для заданной дроби недопустимы, т. к. в этом случае дробь не имеет смысла.

Дробное выражение не имеет смысла при тех значениях переменных, при которых знаменатели величин равны нулю.

Пример 4

а) Дробное выражение $A=3ab^2+\frac{7a-3b}{a-2}$ не имеет смысла при $a - 2 = 0$ (т. к. делить на нуль нельзя), т. е. при $a = 2$. При всех остальных значениях a это выражение имеет смысл. Поэтому допустимыми значениями переменных являются все значения a, кроме числа 2, и все значения b.

б) Дробное выражение $A=3x^2+3y^4+\frac{3x+2y}{x-2y}$ не имеет смысла при $x - 2y = 0$ (т. к. делить на нуль нельзя), т. е. при $x = 2y$. При всех остальных значениях переменных x и y это выражение имеет смысл. Поэтому допустимыми значениями переменных являются все значения x и y, кроме тех, для которых $x = 2y$.

в) Алгебраическая дробь $A=\frac{2a+3b^2}{(a-2)(b+3)}$ не имеет смысла, если знаменатель $(a-2)(b+3)=0$. Такое равенство выполняется при $a = 2$ и $b = -3$. Поэтому допустимыми значениями переменных являются все значения a, кроме числа 2, и все значения b, кроме числа -3.

г) Алгебраическая дробь $A=\frac{5a^2}{9a^2-16}$ не имеет смысла, если знаменатель дроби $9a^2 - 16 = 0$. Решим это уравнение. Используя формулу разности квадратов, разложим его левую часть на множители: $9a^2 - 16 = 0$, или $(3a)^2 - 4^2 = 0$, или $(3a - 4)(3a + 4) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $3a - 4 = 0$ (его корень $a = \frac{4}{3}$) и $3a + 4 = 0$ (корень $a = -\frac{4}{3}$). Поэтому допустимые значения переменной a – все числа, кроме чисел $-\frac{4}{3}$ и $\frac{4}{3}$.

д) Алгебраическая дробь $A = \frac{3a^2b}{2a^2 + 3b^2 + 1}$ имеет смысл при всех значениях a и b, т. к. знаменатель дроби $2a^2 + 3b^2 + 1$ не равен нулю при всех значениях переменных.

III. Контрольные вопросы

1. Какое выражение называется алгебраической дробью? Приведите примеры.
2. Какие значения переменных являются допустимыми?
3. При каком условии алгебраическая дробь не имеет смысла? Приведите примеры.

IV. Задание на уроке

№ 1.3 (а); 1.5 (г); 1.9 (а, г); 1.11 (а, б); 1.12 (в, г); 1.20 (а, в); 1.25 (в, г); 1.30; 1.31 (а); 1.38; 1.40 (а, б); 1.41 (г).

V. Задание на дом

№ 1.3 (г); 1.5 (в); 1.9 (б, в); 1.11 (в, г); 1.12 (а, б); 1.20 (б, г); 1.25 (а, б); 1.31 (б); 1.32 (а); 1.39; 1.40 (в, г); 1.41 (а).

VI. Подведение итогов урока

§ 2. Основное свойство алгебраической дроби

Урок 2. Основное свойство дроби. Сокращение дробей

Цель: рассмотреть основное свойство дроби и отработать навыки сокращения дробей и приведения дробей к заданному знаменателю.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос + тест).

Вариант 1

1. Какое выражение называется алгебраической дробью? Приведите примеры.

2. Найдите значение дроби $\frac{3x-2}{x+3}$ при $x = 0{,}6$.

Ответы: а) $\frac{1}{36}$; б) $-\frac{1}{9}$; в) $-\frac{1}{18}$.

3. Укажите допустимые значения переменной в выражении $\frac{3x-5}{x+3}+\frac{x-1}{x^2-4}$.

Ответы: а) $x \neq \frac{5}{3}$, $x \neq 1$; б) $x \neq -3$, $x \neq \pm 2$; в) $x \neq \frac{5}{3}$, $x \neq 1$, $x \neq -3$, $x \neq \pm 2$.

Вариант 2

1. Какие значения переменных называются допустимыми? Приведите примеры.

2. Найдите значение дроби $\frac{5x-1}{x+1}$ при $x = 0{,}6$.

Ответы: а) $\frac{2}{5}$; б) $\frac{5}{4}$; в) $\frac{4}{5}$.

3. Укажите допустимые значения переменной в выражении $\frac{2x-3}{x+2}+\frac{x-3}{x^2-1}$.

Ответы: а) $x \neq \frac{3}{2}$, $x \neq 3$; б) $x \neq \frac{3}{2}$, $x \neq 3$, $x \neq -2$, $x \neq \pm 1$; в), $x \neq -2$, $x \neq \pm 1$.

III. Изучение нового материала

Свойства алгебраических дробей и операции с ними очень похожи на свойства числовых дробей и действия с ними. Напомним известное вам **основное свойство** обыкновенной **дроби: если числитель и знаменатель дроби умножить на одно и то же натуральное число, то получится равная дробь**, т. е. равенство $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$ верно при любых натуральных значениях a, b и c.

Это равенство справедливо не только при натуральных, но и при любых других значениях переменных a, b и c, при которых знаменатель не равен нулю, т. е. при $b \neq 0$ и $c \neq 0$.

В связи с этим равенством уточним некоторые понятия 7-го класса. Ранее тождеством называлось равенство, которое выполнялось при любых значениях переменных. Тождествами, например, были все формулы сокращенного умножения, свойства сложения и умножения чисел и т. д.

Равенство $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$ верно при всех значениях переменных, при которых его левая и правая части имеют смысл, т. е. при всех допустимых значениях переменных. Такие равенства также называют тождествами. Очевидно, что ранее данное понятие тождества является частным случаем более общего определения.

Тождеством называется равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него переменных. Два выражения, принимающие равные значения при всех допустимых для них значениях переменных, называют тождественно равными. Замену одного такого выражения другим называют **тождественным преобразованием выражения.**

Равенство $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$ верно при всех допустимых значениях переменных. Поэтому по определению это равенство является тождеством. Такое тождество называют **основным свойством дроби.**

Основное свойство дроби используют для ее **приведения к заданному знаменателю.**

Пример 1

Приведем дробь $\frac{2a^2}{3b^3}$ к знаменателю $27b^5$ (т. е. запишем данную дробь в виде дроби со знаменателем $27b^5$).

В заданном (новом) знаменателе $27b^5$ выделим в качестве множителя старый знаменатель $3b^3$, т. е. запишем равенство $27b^5 = 3b^3 \cdot 9b^2$. Поэтому, чтобы получить дробь с новым знаменателем $27b^5$, по основному свойству дроби умножим числитель и знаменатель данной дроби $\frac{2a^2}{3b^3}$ на множитель $9b^2$. Тогда получим: $\frac{2a^2}{3b^3}=\frac{2a^2\cdot 9b^2}{3b^3\cdot 9b^2}=\frac{18a^2b^2}{27b^5}$. При этом множитель $9b^2$ называют до-

полнительным множителем к числителю и знаменателю данной дроби $\frac{2a^2}{3b^3}$.

Пример 2

Приведем дробь $\frac{3x}{2x-3y}$ к знаменателю $3y-2x$.

Видно, что новый знаменатель $3y-2x$ и старый знаменатель $2x-3y$ отличаются только знаком, т. е. $3y-2x=-(2x-3y)=$ $=-1\cdot(2x-3y)$. Поэтому умножим числитель и знаменатель данной дроби $\frac{3x}{2x-3y}$ на дополнительный множитель -1. По основному свойству дроби получим: $\frac{3x}{2x-3y}=\frac{3x\cdot(-1)}{(2x-3y)\cdot(-1)}=\frac{-3x}{3y-2x}=$ $=-\frac{3x}{3y-2x}$.

Пример 3

Приведем дробь $\frac{5}{3a-4b}$ к знаменателю $16b^2-9a^2$.

Учтем, что новый знаменатель $16b^2-9a^2=-(9a^2-16b^2)=$ $=-(3a+4b)(3a-4b)$ по формуле разности квадратов. Поэтому умножим числитель и знаменатель данной дроби $\frac{5}{3a-4b}$ на дополнительный множитель $-(3a+4b)$. По основному свойству дроби имеем: $\frac{5}{3a-4b}=\frac{5\cdot(-(3a+4b))}{(3a-4b)(-(3a+4b))}=\frac{-5(3a+4b)}{-(3a-4b)(3a+4b)}=\frac{-15a-20b}{-(9a^2-16b^2)}=$ $=\frac{-15a-20b}{16b^2-9a^2}=-\frac{15a+20b}{16b^2-9a^2}$.

Заметим, что **приведение дробей к заданному знаменателю используется при сложении и вычитании дробей**.

Поменяем в основном свойстве дроби $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$ левую и правую части местами и получим тождество $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$. Это равенство позволяет заменить дробь вида $\frac{ac}{bc}$ **более простой** тождественно равной дробью $\frac{a}{b}$, т. е. **сократить дробь** $\frac{ac}{bc}$ **на общий множитель** c числителя и знаменателя.

Пример 4

Сократим дробь $\frac{35a^3b^2}{7a^2b^3}$.

Видно, что числитель $35a^3b^2$ и знаменатель $7a^2b^3$ дроби имеют общий множитель $7a^2b^2$. Поэтому представим числитель и знаменатель дроби в виде произведений, имеющих один и тот же множитель $7a^2b^2$, и сократим дробь на этот множитель.

Получаем: $\frac{35a^3b^2}{7a^2b^3}=\frac{7a^2b^2\cdot 5a}{7a^2b^2\cdot b}=\frac{5a}{b}$.

После сокращения дроби $\frac{35a^3b^2}{7a^2b^3}$ получили более простую дробь $\frac{5a}{b}$.

Заметим, что при сокращении дроби **надо выделять наибольший общий множитель** числителя и знаменателя.

В рассмотренном примере множитель $7a^2b^2$ был наибольшим. Для выражений $35a^3b^2$ и $7a^2b^3$ число 7 является наибольшим общим делителем чисел 35 и 7; a^2 – множитель a в наименьшей степени, с которой он входит в числитель и знаменатель, b^2 – множитель b также в наименьшей степени, с которой он входит в числитель и знаменатель. Поэтому множитель $7a^2b^2$ – наибольший общий множитель числителя и знаменателя.

Если общий множитель числителя и знаменателя будет не наибольшим, то после сокращения на него дроби дробь может быть сокращена еще. Например, если вместо наибольшего общего множителя рассмотреть множитель $7a^2b$, то получаем: $\frac{35a^3b^2}{7a^2b^3}=\frac{7a^2b\cdot 5ab}{7a^2b\cdot b^2}=\frac{5ab}{b^2}$. Очевидно, что полученную дробь $\frac{5ab}{b^2}$ можно еще раз сократить.

Пример 5

Сократим дробь $\frac{8a^3-b^3}{4a^2-b^2}$.

Для сокращения дроби разложим ее числитель и знаменатель на множители, используя **формулы сокращенного умножения**. Для

числителя по формуле разности кубов получаем: $8a^3-b^3=$ $=(2a)^3-b^3=(2a-b)\cdot((2a)^2+2a\cdot b+b^2)=(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$.
Для знаменателя по формуле разности квадратов имеем: $4a^2-b^2=(2a)^2-b^2=(2a-b)(2a+b)$. Видно, что числитель и знаменатель имеют общий множитель $2a-b$, на который сократим дробь: $\frac{8a^3-b^3}{4a^2-b^2}=\frac{(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)}{(2a-b)(a+b)}=\frac{4a^2+2ab+b^2}{2a+b}$.

Разумеется, при сокращении дробей используют и другие способы разложения многочленов, стоящих в числителе и знаменателе дроби, на множители. В частности, широко используется **способ группировки и вынесения общего множителя за скобки**.

Пример 6

Сократим дробь $\frac{ab+ac}{ab-3b+ac-3c}$.

В числителе дроби вынесем общий множитель a за скобки и получим: $ab+ac=a(b+c)$. В знаменателе дроби сгруппируем члены и вынесем общий множитель за скобки. Имеем: $ab-3b+ac-3c=$ $=(ab-3b)+(ac-3c)=b(a-3)+c(a-3)=(a-3)(b+c)$.

Видно, что числитель и знаменатель имеют общий множитель $b+c$, на который сократим данную дробь.

Получаем: $\frac{ab+ac}{ab-3b+ac-3c}=\frac{a(b+c)}{(a-3)(b+c)}=\frac{a}{a-3}$.

Так как для этого и дальнейших уроков используется разложение числителя и знаменателя дроби на множители, то напомним **основные способы разложения многочленов на множители**:

1) **вынесение общего множителя за скобки;**

2) **группировка членов многочлена;**

3) **использование формул сокращенного умножения.**

IV. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте основное свойство алгебраической дроби.
2. Какое равенство называется тождеством? Приведите примеры.
3. Основные способы разложения многочленов на множители.
4. Формулы сокращенного умножения (рекомендуется опросить нескольких учащихся).

V. Задание на уроке

№ 2.1 (а, б); 2.4 (а, г); 2.7 (а, в); 2.10; 2.18; 2.23 (а, г); 2.30 (б, в); 2.34 (а); 2.36 (б); 2.42 (а, г); 2.46 (а, б); 2.47 (а); 2.48 (б).

VI. Задание на дом

№ 2.1 (в, г); 2.4 (б, в); 2.7 (б, г); 2.11; 2.19; 2.23 (б, в); 2.30 (а, г); 2.34 (б); 2.46 (а); 2.42 (б, в); 2.46 (в, г); 2.47 (б); 2.48 (а).

VII. Подведение итогов урока

§ 3. Сложение и вычитание алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями

Урок 3. Сумма и разность дробей с одинаковыми знаменателями

Цель: изучить сложение и вычитание рациональных дробей с одинаковыми знаменателями.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Сократить дробь:

а) $\frac{3a^3b^2}{15ab^4}$;

б) $\frac{a^2+2ab}{a^2-4b^2}$;

в) $\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$.

2. Постройте график функции $y=\frac{4x^2-1}{2x+1}$.

Вариант 2

1. Сократить дробь:

а) $\dfrac{6a^4b}{18a^2b^3}$;

б) $\dfrac{a^3-3a^2b}{a^2-9b^2}$;

в) $\dfrac{x^2+4x+4}{2x^2-8}$.

2. Постройте график функции $y=\dfrac{1-4x^2}{2x-1}$.

III. Изучение нового материала

При сложении (вычитании) обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями складываются (вычитаются) их числители, а знаменатель остается тем же.

Пример 1

Найдем сумму и разность дробей $\dfrac{5}{9}$ и $\dfrac{2}{9}$.

По приведенному ранее правилу получаем: $\dfrac{5}{9}+\dfrac{2}{9}=\dfrac{5+2}{9}=\dfrac{7}{9}$ и $\dfrac{5}{9}-\dfrac{2}{9}=\dfrac{5-2}{9}=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$.

По тому же правилу складывают и любые дроби с одинаковыми знаменателями, т. е. $\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}=\dfrac{a+b}{c}$ (очевидно, при $c\neq 0$).

Пример 2

Сложим дроби $\dfrac{3a-3b}{16a^2b}$ и $\dfrac{5a+3b}{16a^2b}$.

В соответствии с правилом получаем:

$$\frac{3a-3b}{16a^2b}+\frac{5a+3b}{16a^2b}=\frac{3a-3b+5a+3b}{16a^2b}=\frac{8a}{16a^2b}=\frac{8a}{8a\cdot 2ab}=\frac{1}{2ab}.$$

Пример 3

Сложим дроби $\dfrac{a^2+a}{3(a+2)^3}$, $\dfrac{3a+2}{3(a+2)^3}$ и $\dfrac{2}{3(a+2)^3}$.

Еще раз используем правило сложения дробей и получим:
$$\frac{a^2+a}{3(a+2)^3}+\frac{3a+2}{3(a+2)^3}+\frac{2}{3(a+2)^3}=\frac{a^2+a+3a+2+2}{3(a+2)^3}=\frac{a^2+4a+4}{3(a+2)^3}=$$
$$=\frac{(a+2)^2}{3(a+2)^3}=\frac{1}{3(a+2)}.$$

Вычитание дробей с одинаковыми знаменателями выполняется аналогично сложению, т. е. $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$ (где $c\neq 0$).

Чтобы найти разность дробей с одинаковыми знаменателями, надо из числителя первой дроби вычесть числитель второй дроби, а знаменатель оставить тем же.

Пример 4

Вычтем из дроби $\frac{3a^2}{a+2b}$ дробь $\frac{12b^2}{a+2b}$.

Применим правило вычитания дробей и получим:
$$\frac{3a^2}{a+2b}-\frac{12b^2}{a+2b}=\frac{3a^2-12b^2}{a+2b}=\frac{3(a^2-4b^2)}{a+2b}=\frac{3(a-2b)(a+2b)}{a+2b}=$$
$$=3(a-2b).$$

Иногда при выполнении сложения или вычитания дробей приходится **изменять знак знаменателя** одной из дробей и **заменять операцию сложения операцией вычитания** (или наоборот).

Пример 5

Сложим дроби $\frac{2a^2}{a-2b}$ и $\frac{8b^2}{2b-a}$.

Учтем, что знаменатели дробей являются противоположными выражениями. Поэтому изменим знаки в знаменателе второй дроби и перед этой дробью (это равнозначно умножению числителя и знаменателя дроби на число -1 в соответствии с основным свойством дроби). Получим: $\frac{8b^2}{2b-a}=\frac{8b^2\cdot(-1)}{(2b-a)\cdot(-1)}=$

$=\frac{-8b^2}{-2b+a}=-\frac{8b^2}{a-2b}$. После этого сложение данных дробей сводится к вычитанию дробей с одинаковыми знаменателями. Тогда имеем: $\dfrac{2a^2}{a-2b}+\dfrac{8b^2}{2b-a}=\dfrac{2a^2}{a-2b}-\dfrac{8b^2}{a-2b}=\dfrac{2a^2-8b^2}{a-2b}=\dfrac{2(a^2-4b^2)}{a-2b}=$

$=\dfrac{2(a-2b)(a+2b)}{a-2b}=2(a+2b).$

Разумеется, **правила сложения и вычитания дробей**, в ряде случаев удобно использовать **совместно**.

Пример 6

Упростим выражение $\dfrac{a^2+3}{a^2-3a}-\dfrac{3a-2}{a^2-3a}+\dfrac{4-3a}{a^2-3a}$.

Применим совместно правила сложения и вычитания дробей с одинаковыми знаменателями и получим: $\dfrac{a^2+3}{a^2-3a}-\dfrac{3a-2}{a^2-3a}+\dfrac{4-3a}{a^2-3a}=$

$=\dfrac{a^2+3-(3a-2)+4-3a}{a^2-3a}=\dfrac{a^2+3-3a+2+4-3a}{a^2-3a}=\dfrac{a^2-6a+9}{a^2-3a}=$

$=\dfrac{(a-3)^2}{a(a-3)}=\dfrac{a-3}{a}$. Данное выражение имеет смысл при тех значениях a, при которых знаменатель $a(a-3)\neq 0$, т. е. при $a\neq 0$ и $a\neq 3$.

IV. Контрольные вопросы

1. Как складывают (вычитают) обыкновенные дроби с одинаковыми знаменателями? Приведите примеры.

2. Алгоритм сложения (вычитания) алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями. Приведите примеры.

V. Задание на уроке

№ 3.2 (а, б); 3.6 (а, в); 3.10 (а, г); 3.13 (б, в); 3.15 (а); 3.16 (а, б); 3.19 (а); 3.21; 3.23; 3.27.

VI. Задание на дом

№ 3.2 (б, г); 3.7 (б, г); 3.10 (б, в); 3.13 (а, г); 3.15 (б); 3.16 (в, г); 3.19 (б); 3.22; 3.24; 3.28.

VII. Подведение итогов урока

§ 4. Сложение и вычитание алгебраических дробей с разными знаменателями

Уроки 4–5. Сумма и разность дробей с разными знаменателями

Цель: изучить сложение и вычитание дробей с разными знаменателями.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Как складываются дроби с одинаковыми знаменателями?

2. Выполните действия:

а) $\frac{2a+5}{a^2-9}-\frac{a+2}{a^2-9}$;

б) $\frac{c^2+8c}{4-c^2}+\frac{4-4c}{4-c^2}$.

3. Выделите целую и дробную часть в выражении $\frac{x^2+2x+3}{x+2}$.

Вариант 2

1. Как вычитаются дроби с одинаковыми знаменателями?

2. Выполните действия:

а) $\frac{4a+7}{a^2-4}-\frac{3a+5}{a^2-4}$;

б) $\frac{c^2+17c}{16-c^2}+\frac{16-9c}{16-c^2}$.

3. Выделите целую и дробную часть в выражении $\frac{x^2-3x+4}{x-3}$.

III. Изучение нового материала

Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями надо свести к сложению и вычитанию дробей с одинаковыми знаменателями. Для этого исходные дроби приводят к общему знаменателю.

Пусть требуется найти сумму (разность) дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$. Общим знаменателем этих дробей будет произведение знаменателей дробей bd. Приведем данные дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ к такому общему знаменателю. Для этого умножим числитель и знаменатель первой дроби $\frac{a}{b}$ на дополнительный множитель d и получим $\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}$. Числитель и знаменатель второй дроби $\frac{c}{d}$ умножим на дополнительный множитель b и получим $\frac{c}{d}=\frac{bc}{bd}$.

Теперь можно использовать правило сложения дробей с одинаковыми знаменателями. Имеем: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$. Аналогично можно найти разность дробей с разными знаменателями: $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{bc}{bd}=\frac{ad-bc}{bd}$.

Пример 1

Найдем сумму и разность дробей $\frac{3a}{4b}$ и $\frac{2b}{5a}$.

Общий знаменатель этих дробей – произведение их знаменателей $4b \cdot 5a = 20ab$. Тогда дополнительный множитель к числителю и знаменателю первой дроби $5a$, дополнительный множитель к числителю и знаменателю второй дроби $4b$. Поэтому получаем:

$$\frac{3a}{4b}+\frac{2b}{5a}=\frac{3a\cdot 5a+2b\cdot 4b}{20ab}=\frac{15a^2+8b^2}{20ab};$$

$$\frac{3a}{4b}-\frac{2b}{5a}=\frac{3a\cdot 5a-2b\cdot 4b}{20ab}=\frac{15a^2-8b^2}{20ab}.$$

Пример 2

Сложим дроби $\frac{3}{4a^2b^3}$ и $\frac{5}{6ab^4}$.

Общий знаменатель этих дробей – произведение их знаменателей $4a^2b^3 \cdot 6ab^4 = 24a^3b^7$. Тогда дополнительный множитель к первой дроби $6ab^4$, ко второй дроби $4a^2b^3$. Поэтому получаем: $\frac{3}{4a^2b^3}+\frac{5}{6ab^4}=\frac{3\cdot 6ab^4+5\cdot 4a^2b^3}{24a^3b^7}=\frac{18ab^4+20a^2b^3}{24a^3b^7}$. Теперь упростим полученную дробь. Для этого разложим числитель дроби на множители (вынеся общий множитель за скобки) и сократим дробь:

$$\frac{18ab^4+20a^2b^3}{24a^3b^7}=\frac{2ab^3(9b+10a)}{24a^3b^7}=\frac{2ab^3(9b+10a)}{2ab^3\cdot 12a^2b^4}=\frac{9b+10a}{12a^2b^4}.$$

Таким образом, **алгоритм сложения (вычитания) алгебраических дробей** сводится к двум пунктам:

1) привести все дроби к общему знаменателю. Если дроби уже имеют общий знаменатель, то этот пункт опускают;

2) выполнить сложение (вычитание) полученных дробей с одинаковыми знаменателями.

Заметим, что сложение и вычитание дробей с разными знаменателями можно упростить, если приводить дроби не просто к общему знаменателю, а **к наименьшему общему знаменателю.**

В рассмотренном примере наименьшим общим знаменателем будет одночлен $12a^2b^4$. Коэффициент этого одночлена равен наименьшему общему кратному коэффициентов дробей – 4 и 6. Каждая переменная a и b входит в наименьший общий знаменатель с наибольшим показателем, с которым она входит в знаменатели дробей (соответственно a^2 и b^4). Дополнительный множитель к первой дроби получим, если разделим наименьший общий знаменатель на знаменатель первой дроби: $\frac{12a^2b^4}{4a^2b^3}=3b$. Аналогично, дополнительный множитель ко второй дроби найдем, если разделим наименьший общий знаменатель на знаменатель второй дроби: $\frac{12a^2b^4}{6ab^4}=2a$. Теперь найдем сумму данных дробей: $\frac{3}{4a^2b^3}+\frac{5}{6ab^4}=$ $=\frac{3\cdot 3b+5\cdot 2a}{12a^2b^4}=\frac{9b+10a}{12a^2b^4}$.

Пример 3

Найдем разность дробей $\frac{5a+7b}{a^2+ab}$ и $\frac{7a+5b}{ab+b^2}$.

Чтобы найти наименьший общий знаменатель дробей, разложим знаменатель каждой дроби на множители: $\frac{5a+7b}{a^2+ab}-\frac{7a+5b}{ab+b^2}=$

$=\frac{5a+7b}{a(a+b)}-\frac{7a+5b}{b(a+b)}$.

Наименьшим общим знаменателем дробей будет выражение $ab(a+b)$. Дополнительный множитель к первой дроби – b, ко второй дроби – a. Тогда получаем: $\frac{5a+7b}{a^2+ab}-\frac{7a+5b}{ab+b^2}=\frac{5a+7b}{a(a+b)}-\frac{7a+5b}{b(a+b)}=$

$=\frac{(5a+7b)b-(7a+5b)a}{ab(a+b)}=\frac{5ab+7b^2-7a^2-5ab}{ab(a+b)}=\frac{7b^2-7a^2}{ab(a+b)}=$

$=\frac{7(b+a)(b-a)}{ab(a+b)}=\frac{7(b-a)}{ab}$.

Приведем **алгоритм нахождения общего знаменателя** для нескольких алгебраических дробей:

1. Разложить все знаменатели на множители.

2. Найти наименьшее общее кратное (НОК) для числовых коэффициентов, входящих в знаменатели дробей.

3. Записать произведение всех буквенных множителей, входящих хотя бы в одно из разложений п. 1. Если некоторый множитель имеется в нескольких разложениях, то его надо взять с наибольшим из имеющихся показателем степени.

4. Перед таким произведением надо поставить коэффициент, найденный в п. 2. Полученное выражение будет наименьшим общим знаменателем данных дробей.

Как показывает опыт проведения занятий, для некоторой части учеников приведенный алгоритм удобнее в несколько другой форме. Поэтому еще раз в другой формулировке дадим **алгоритм приведения алгебраических дробей к общему знаменателю**:

1. Разложить все знаменатели на множители.

2. Выписать разложение первого знаменателя. Из остальных знаменателей приписать к этому разложению недостающие множители. Полученное произведение и будет наименьшим общим (новым) знаменателем данных дробей.

3. Найти дополнительные множители для каждой из дробей: это будут произведения тех множителей, которые есть в новом знаменателе, но которых нет в старом знаменателе.

4. Найти для каждой дроби новый числитель: это будет произведение старого числителя и дополнительного множителя.

5. Записать каждую дробь с новым числителем и новым (общим) знаменателем.

Преобразование рационального выражения, которое является суммой или разностью целого выражения и дроби, сводится к нахождению суммы или разности дробей, т. к. любое целое выражение можно представить в виде дроби со знаменателем 1.

Пример 4

Упростим выражение $1-a-\dfrac{a^3}{a+1}+a^2$.

В данном выражении выделим целое выражение и представим его в виде дроби со знаменателем 1. Выполним вычитание дробей, используя формулу суммы кубов. Тогда получим: $1-a-\dfrac{a^3}{a+1}+a^2=$

$$=a^2-a+1-\frac{a^3}{a+1}=\frac{a^2-a+1}{1}-\frac{a^3}{a+1}=\frac{(a+1)(a^2-a+1)-a^3}{a+1}=$$

$$=\frac{a^3+1^3-a^3}{a+1}=\frac{1}{a+1}.$$

В некоторых задачах удобно выполнить сложение и вычитание не всех дробей сразу, а выполнять эти операции поочередно.

Пример 5

Докажем, что при любом значении $a>1$ значение выражения $\dfrac{1}{1-a}+\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{2}{1+a^2}+\dfrac{4}{1+a^4}$ отрицательно.

Сначала упростим данное выражение, сложив данные дроби. При этом удобно сложить сначала первые две дроби: $\dfrac{1}{1-a}+\dfrac{1}{1+a}=$

$=\dfrac{1\cdot(1+a)+1\cdot(1-a)}{(1-a)(1+a)}=\dfrac{1+a+1-a}{1^2-a^2}=\dfrac{2}{1-a^2}$. Теперь к этому результату прибавим третью дробь: $\dfrac{2}{1-a^2}+\dfrac{2}{1+a^2}=\dfrac{2\cdot(1+a^2)+2\cdot(1-a^2)}{(1-a^2)(1+a^2)}=$

$=\dfrac{2+2a^2+2-2a^2}{1^2-(a^2)^2}=\dfrac{4}{1-a^4}$. Наконец, к этой дроби прибавим последнюю четвертую дробь: $\frac{4}{1-a^4}+\frac{4}{1+a^4}=\frac{4(1-a^4)+4(1+a^4)}{(1-a^4)(1+a^4)}=$

$=\frac{4-4a^4+4+4a^4}{1^2-(a^4)^2}=\frac{8}{1-a^8}$.

Легко сообразить, что при $a > 1$ (например, при $a = 2$) и величина $a^8 > 1$. Тогда знаменатель $1 - a^8$ полученной дроби $\frac{8}{1-a^8}$ отрицательный. Так как при этом числитель дроби положительный, то дробь будет отрицательной.

IV. Контрольные вопросы

1. Приведение дробей к общему знаменателю. Понятие дополнительного множителя к числителю и знаменателю дроби.

2. Покажите, что сложение и вычитание дробей с разными знаменателями сводится к сложению и вычитанию дробей с одинаковыми знаменателями.

3. Как складываются и вычитаются дроби с разными знаменателями?

4. Сложение (вычитание) целого выражения и дроби.

V. Задание на уроке

№ 4.4 (а, б); 4.7 (б, в); 4.18 (а, г); 4.19 (а); 4.23 (б); 4.30 (а, в); 4.35 (а); 4.45 (в); 4.48 (б); 4.51 (а); 4.52 (б); 4.53.

VI. Задание на дом

№ 4.4 (в, г); 4.7 (а, г); 4.18 (б, в); 4.19 (в); 4.23 (а); 4.30 (б, г); 4.35 (б); 4.45 (г); 4.48 (г); 4.51 (б); 4.52 (а); 4.54.

VII. Творческие задания

Найдите a и b из тождества:

а) $\frac{3}{(x+2)(x+5)}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x+5}$; б) $\frac{2}{x^2+2x-3}=\frac{a}{x+3}+\frac{b}{x-1}$;

в) $\frac{7}{(x-2)(x+4)}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+4}$; г) $\frac{5}{x^2-x-6}=\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x+2}$.

Ответы: а) $a = 1$, $b = -1$; б) $a = -0{,}5$, $b = 0{,}5$ (предварительно убедитесь, что $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$); в) $a=\frac{7}{6}$, $b=-\frac{7}{6}$; г) $a = 1$, $b=-1$ (убедитесь, что $x^2-x-6= =(x-3)(x+2)$).

VIII. Подведение итогов урока

Уроки 6–7. Контрольная работа № 1 по теме «Сложение и вычитание алгебраических дробей»

Цель: проверка знаний учащихся с использованием разноуровневых вариантов.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в 6 вариантах различной сложности (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – сложнее, варианты 5, 6 – самые сложные). При этом сложность вариантов нарастает не очень резко. Каждый вариант содержит 6 задач примерно одинаковой сложности (может быть, несколько сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач.

При таких же критериях оценки в случае вариантов 3, 4 дается дополнительно 0,5 балла и в случае вариантов 5, 6 – дополнительно 1,0 балла (учитывая более высокую сложность этих вариантов). Поэтому в случае вариантов 5, 6 оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач.

Выбор вариантов может быть сделан учителем или учащимся (при этом число экземпляров вариантов должно быть достаточным). Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

III. Варианты работы

Вариант 1

1. При каких значениях переменной выражение $\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-2}$ равно нулю, а при каких не существует?

2. Сократите дробь:

а) $\frac{24a^3b^2}{8a^2b^5}$;

б) $\frac{x^2+3xy}{xy+3y^2}$.

3. Выполните действия: $\frac{a}{a+3}-\frac{a^2-3a-9}{a^2+3a}$.

4. Найдите значение выражения $\frac{a^2+3b}{a}-a$ при $a=0{,}3$; $b=2$.

5. Постройте график функции $y=\frac{x^2-4}{2-x}$.

Вариант 2

1. При каких значениях переменной выражение $\frac{3}{x+2}+\frac{2}{x-1}$ равно нулю, а при каких не существует?

2. Сократите дробь:

а) $\frac{18a^3b^4}{3a^5b^2}$;

б) $\frac{3x^2+xy}{3xy+y^2}$.

3. Выполните действия: $\frac{a}{a-4}-\frac{a^2-2a+8}{a^2-4a}$.

4. Найдите значение выражения $\frac{a^2-2b}{a}-a$ при $a=0{,}2$; $b=5$.

5. Постройте график функции $y=\frac{x^2-9}{3-x}$.

Вариант 3

1. Найдите допустимые значения переменной в выражении $\frac{3x-6}{x-2}+\frac{2x-6}{x+1}$.

2. Сократите дробь: $\frac{x^2-4x+4}{4-x^2}$.

3. Упростите выражение $\frac{a+3}{a^2+a}-\frac{1}{a+1}+\frac{2}{a}$.

4. Выделите целую и дробную часть в выражении $\frac{2x^2-4x+7}{x-2}$.

5. Постройте график функции $y=\frac{x^2-6x+9}{3-x}+\frac{4x^2-6x}{x}$.

6. Найдите значения a и b, для которых при всех допустимых значениях x выполнимо равенство $\dfrac{ax^2+x+b}{x+2}=2x-3$.

Вариант 4

1. Найдите допустимые значения переменной в выражении $\dfrac{5x+15}{x+3}+\dfrac{3x-1}{x-2}$.

2. Сократите дробь: $\dfrac{9-x^2}{x^2+6x+9}$.

3. Упростите выражение $\dfrac{a-3}{a^2-a}-\dfrac{1}{a-1}-\dfrac{4}{a}$.

4. Выделите целую и дробную часть в выражении $\dfrac{3x^2-12x+5}{x-4}$.

5. Постройте график функции $y=\dfrac{x^2-4x+4}{2-x}+\dfrac{3x^2-4x}{x}$.

6. Найдите значения a и b, для которых при всех допустимых значениях x выполнимо равенство $\dfrac{ax^2-8x+b}{x-3}=3x+1$.

Вариант 5

1. Найдите допустимые значения переменной в выражении $\dfrac{4x+4}{x+1}+\dfrac{x^2-6x+9}{3-x}+\dfrac{2x+5}{4-x^2}$.

2. Сократите дробь: $\dfrac{ax+2b+2a+bx}{3a-bx+3b-ax}$.

3. Найдите значение выражения $\dfrac{a^2}{a^2-9}+\dfrac{3}{a+3}-\dfrac{a}{a-3}$ при $a=1{,}5$.

4. Постройте график функции $y=\dfrac{x^3-4x}{x-2}-2x$.

5. Сократите дробь $\dfrac{x^3+x^2+x-3}{x-1}$.

6. Найдите значения a и b, для которых при всех допустимых значениях x выполнимо равенство $\dfrac{x+3}{6x^2+x-2}=\dfrac{a}{2x-1}+\dfrac{b}{3x+2}$.

Вариант 6

1. Найдите допустимые значения переменной в выражении $\frac{3x-3}{x-1}+\frac{x^2+4x+4}{x+2}-\frac{5x-4}{9-x^2}$.

2. Сократите дробь: $\frac{ax+3b-3a-bx}{ax-b+a-bx}$.

3. Найдите значение выражения $\frac{4}{x+2}-\frac{3}{x-2}+\frac{12}{x^2-4}$ при $x=-0{,}6$.

4. Постройте график функции $y=\frac{4x-x^3}{x+2}-2x$.

5. Сократите дробь $\frac{x^3-2x^2+x+4}{x+1}$.

6. Найдите значения a и b, для которых при всех допустимых значениях x выполнимо равенство $\frac{8x+1}{6x^2+7x-3}=\frac{a}{2x+3}+\frac{b}{3x-1}$.

Урок 8. Итоги контрольной работы

***Цели*:** сообщить результаты работы, рассмотреть наиболее типичные ошибки, разобрать трудные задачи.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Итоги контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения.

Данные о результатах работы удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

Итоги \ № задачи	1	2	3	...	6
+	5				
±	1				
—	1				
Ø	1				

Обозначения:

+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;

± – число решивших задачу со значительными ошибками;

— – число не решивших задачу;

Ø – число не решавших задачу.

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.

3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, решившими эту задачу).

4. Разбор всей контрольной работы (вывесить на стенде ответы к заданиям вариантов и разбор наиболее трудных вариантов).

III. Ответы и решения

Ответы

Вариант 1

1. *Ответ*: равно нулю при $x = \frac{1}{5}$, не существует при $x = -1$ и $x = 2$.

2. *Ответ*: а) $\frac{3a}{b^3}$ (при $a, b \neq 0$); б) $\frac{x}{y}$ (при $y \neq 0, x + 3y \neq 0$).

3. *Ответ*: $\frac{3}{a}$ (при $a \neq 0, a \neq -3$).

4. *Ответ*: 20.

5. *Ответ*: график функции $y = -x - 2$ при $x \neq 2$.

Вариант 2

1. *Ответ*: равно нулю при $x = -\frac{1}{5}$, не существует при $x = -2$ и $x = 1$.

2. *Ответ*: а) $\frac{6b^2}{a^2}$ (при $a, b \neq 0$); б) $\frac{x}{y}$ (при $y \neq 0, 3x + y \neq 0$).

3. *Ответ*: $\frac{2}{a}$ (при $a \neq 0, a \neq 4$).

4. *Ответ*: −50.

5. *Ответ*: график функции $y = -x - 3$ при $x \neq 3$.

Вариант 3

1. *Ответ*: $x \neq 2$ и $x \neq -1$.

2. *Ответ*: $\frac{2-x}{2+x}$ (при $x \neq \pm 2$).

3. *Ответ*: $\frac{2a+5}{a(a+1)}$ (при $a \neq 0, a \neq -1$).

4. *Ответ*: $2x + \frac{7}{x-2}$ (при $x \neq 2$).

5. *Ответ*: график функции $y = 3x - 3$ при $x \neq 0$, $x \neq 3$.
6. *Ответ*: $a = 2$, $b = -6$ (при $x \neq -2$).

Вариант 4

1. *Ответ*: $x \neq -3$ и $x \neq 2$.
2. *Ответ*: $\dfrac{3-x}{3+x}$ (при $x \neq -3$).
3. *Ответ*: $\dfrac{1-4a}{a(a-1)}$ (при $a \neq 0$, $a \neq 1$).
4. *Ответ*: $3x + \dfrac{5}{x-4}$ (при $x \neq 4$).
5. *Ответ*: график функции $y = 2x - 2$ при $x \neq 0$, $x \neq 2$.
6. *Ответ*: $a = 3$, $b = -3$ (при $x \neq 3$).

Решения

Вариант 5

1. Заметим, что допустимые значения переменной устанавливаются до начала преобразования выражения. Поэтому в выражении $\dfrac{4x+4}{x+1} + \dfrac{x^2-6x+9}{3-x} + \dfrac{2x+5}{4-x^2}$ допустимые значения определяются тремя условиями: $x + 1 \neq 0$, $3 - x \neq 0$, $4 - x^2 \neq 0$. Тогда находим: $x \neq -1$, $x \neq 3$, $x \neq \pm 2$. Если сократить первую и вторую дроби, то получим выражение: $4 + 3 - x + \dfrac{2x+5}{4-x^2}$. Однако допустимые значения переменной для этого выражения будут уже другие.

Ответ: $x \neq -1$, $x \neq 3$, $x \neq \pm 2$.

2. Используя способ группировки, разложим числитель и знаменатель дроби на множители и сократим ее. Получаем:

$$\frac{ax+2b+2a+bx}{3a-bx+3b-ax} = \frac{(ax+bx)+(2a+2b)}{(3a+3b)-(ax+bx)} = \frac{x(a+b)+2(a+b)}{3(a+b)-x(a+b)} =$$

$= \dfrac{(a+b)(x+2)}{(a+b)(3-x)} = \dfrac{x+2}{3-x}$. Преобразования справедливы при $a \neq -b$, $x \neq 3$.

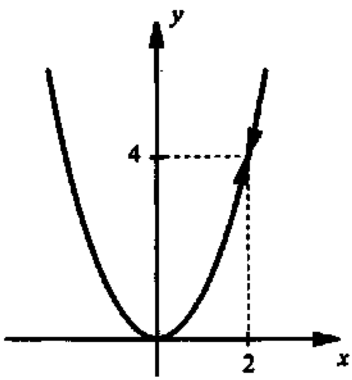
Ответ: $\dfrac{x+2}{3-x}$ (при $a \neq -b$, $x \neq 3$).

3. Сначала упростим данное выражение, выполнив следующие действия: $\dfrac{a^2}{a^2-9} + \dfrac{3}{a+3} - \dfrac{a}{a-3} = \dfrac{a^2+3(a-3)-a(a+3)}{a^2-9} = \dfrac{a^2+3a-9-a^2-3a}{a^2-9} =$

$= \frac{-9}{a^2-9} = \frac{9}{9-a^2}$. Теперь найдем значение этого выражения при $a = 1{,}5$. Получаем: $\frac{9}{9-1{,}5^2} = \frac{9}{(3-1{,}5)(3+1{,}5)} = \frac{9}{1{,}5\cdot 4{,}5} = \frac{2}{1{,}5} = \frac{2\cdot 2}{3} = \frac{4}{3}$.

Ответ: $\frac{4}{3}$.

4. Найдем область определения функции $y = \frac{x^3-4x}{x-2} - 2x$: $x \neq 2$ и упростим функцию, сократив дробь: $y = \frac{x(x^2-4)}{x-2} - 2x = \frac{x(x-2)(x+2)}{x-2} - 2x = x(x+2) - 2x = x^2$. Построим график функции $y = x^2$ (парабола) с учетом ограничения $x \neq 2$ (стрелками указана точка, не входящая в график).



Ответ: см. график.

5. Если дробь сократима, то ее числитель содержит множитель, равный знаменателю. Поэтому разложим числитель на множители, все время выделяя в качестве множителя знаменатель. Получаем: $x^3 + x^2 + x - 3 = (x^3 - x^2) + (2x^2 - 2x) + (3x - 3) = x^2(x-1) + 2x(x-1) + 3(x-1) = (x-1)(x^2+2x+3)$. Теперь легко сократить данную дробь: $\frac{x^3+x^2+x-3}{x-1} = \frac{(x-1)(x^2+2x+3)}{x-1} = x^2+2x+3$ (при $x \neq 1$).

Ответ: x^2+2x+3 (при $x \neq 1$).

6. В правой части равенства $\frac{x+3}{6x^2+x-2}=\frac{a}{2x-1}+\frac{b}{3x+2}$ сложим дроби и получим: $\frac{x+3}{6x^2+x-2}=\frac{a(3x+2)+b(2x-1)}{(2x-1)(3x+2)}$, или $\frac{x+3}{6x^2+x-2}=$ $=\frac{3ax+2a+2bx-b}{6x^2+x-2}$, или $\frac{x+3}{6x^2+x-2}=\frac{(3a+2b)x+(2a-b)}{6x^2+x-2}$.

Так как знаменатели дробей одинаковы, то дроби будут равны при всех допустимых значениях x, если при таких x совпадут числители. Это возможно только при выполнении двух условий: $\begin{cases}3a+2b=1,\\2a-b=3.\end{cases}$

Решив такую систему линейных уравнений, найдем $a = 1$, $b = -1$. Допустимые значения переменной $x\neq\frac{1}{2}$ и $x\neq-\frac{2}{3}$.

Ответ: $a = 1$, $b = -1$ (при $x\neq\frac{1}{2}$, $x\neq-\frac{2}{3}$).

Вариант 6

1. Заметим, что допустимые значения переменной устанавливаются до начала преобразования выражения. Поэтому в выражении $\frac{3x-3}{x-1}+\frac{x^2+4x+4}{x+2}-\frac{5x-4}{9-x^2}$ допустимые значения определяются тремя условиями: $x-1\neq0$, $x+2\neq0$, $9-x^2\neq0$. Тогда находим: $x\neq1$, $x\neq-2$, $x\neq\pm3$. Если сократить первую и вторую дроби, то получим выражение: $3+x+2-\frac{5x-4}{9-x^2}$. Однако допустимые значения переменной для этого выражения будут уже другие.

Ответ: $x\neq1$, $x\neq-2$, $x\neq\pm3$.

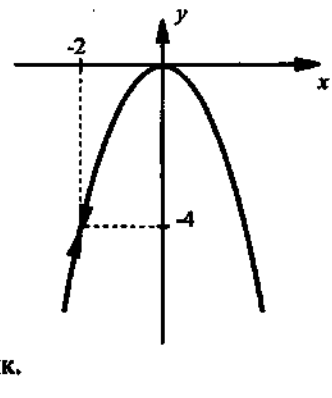
2. Используя способ группировки, разложим числитель и знаменатель дроби на множители и сократим ее. Получаем: $\frac{ax+3b-3a-bx}{ax-b+a-bx}=\frac{(ax-bx)-(3a-3b)}{(ax-bx)+(a-b)}=\frac{x(a-b)-3(a-b)}{x(a-b)+(a-b)}=$ $=\frac{(a-b)(x-3)}{(a-b)(x+1)}=\frac{x-3}{x+1}$. Преобразования справедливы при $a\neq b$, $x\neq-1$.

Ответ: $\frac{x-3}{x+1}$ (при $a\neq b$, $x\neq-1$).

3. Сначала упростим данное выражение, выполнив следующие действия: $\frac{4}{x+2}-\frac{3}{x-2}+\frac{12}{x^2-4}=\frac{4(x-2)-3(x+2)+12}{x^2-4}=\frac{4x-8-3x-6+12}{x^2-4}=$ $=\frac{x-2}{x^2-4}=\frac{1}{x+2}$. Теперь найдем значение этого выражения при $x=-0{,}6$. Получаем: $\frac{1}{-0{,}6+2}=\frac{1}{1{,}4}=\frac{10}{14}=\frac{5}{7}$.

Ответ: $\frac{5}{7}$.

4. Найдем область определения функции $y=\frac{4x-x^3}{x+2}-2x$: $x\neq-2$ и упростим функцию, сократив дробь: $y=\frac{x(4-x^2)}{x+2}-2x=$ $=\frac{x(2-x)(2+x)}{x+2}-2x=x(2-x)-2x=-x^2$. Построим график функции $y=-x^2$ (парабола) с учетом ограничения $x\neq-2$ (стрелками указана точка, не входящая в график).



Ответ: см. график.

5. Если дробь сократима, то ее числитель содержит множитель равный знаменателю. Поэтому разложим числитель на множители, все время выделяя в качестве множителя знаменатель. Получаем: $x^3-2x^2+x+4=(x^3+x^2)+(-3x^2-3x)+(4x+4)=x^2(x+1)-3x(x+1)+$ $+4(x+1)=(x+1)(x^2-3x+4)$. Теперь легко сократить данную дробь: $\frac{x^3-2x^2+x+4}{x+1}=\frac{(x+1)(x^2-3x+4)}{x+1}=x^2-3x+4$ (при $x\neq-1$).

Ответ: x^2-3x+4 (при $x\neq-1$).

6. В правой части равенства $\frac{8x+1}{6x^2+7x-3}=\frac{a}{2x+3}+\frac{b}{3x-1}$ сложим дроби и получим: $\frac{8x+1}{6x^2+7x-3}=\frac{a(3x-1)+b(2x+3)}{(2x+3)(3x-1)}$, или $\frac{8x+1}{6x^2+7x-3}=$ $=\frac{3ax-a+2bx+3b}{6x^2+7x-3}$, или $\frac{8x+1}{6x^2+7x-3}=\frac{(3a+2b)x+(3b-a)}{6x^2+7x-3}$.

Так как знаменатели дробей одинаковы, то дроби будут равны при всех допустимых значениях x, если при таких x совпадут числители. Это возможно только при выполнении двух условий: $\begin{cases}3a+2b=8,\\3b-a=1.\end{cases}$

Решив такую систему линейных уравнений, найдем $a = 2$, $b = 1$. Допустимые значения переменной $x\neq-\frac{3}{2}$ и $x\neq\frac{1}{3}$.

Ответ: $a=2$, $b=1$ (при $x\neq-\frac{3}{2}$, $x\neq\frac{1}{3}$).

§ 5. Умножение и деление алгебраических дробей. Возведение алгебраической дроби в степень

Урок 9. Произведение дробей, возведение их в степень

Цель: изучить умножение дробей и возведение их в степень.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

При умножении обыкновенных дробей получается дробь, числитель которой равен произведению числителей дробей, а знаменатель – произведению знаменателей. Например,

$\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{13} = \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 13} = \frac{28}{65}$. **По тому же правилу находят и произведение алгебраических дробей**, т. е. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ при любых допустимых значениях переменных (т. е. при $b \neq 0$ и $d \neq 0$).

Пример 1

Перемножим дроби $\frac{12a^3}{5b^2}$ и $\frac{15b^4}{28a^6}$.

Используя правило умножения дробей, получаем: $\frac{12a^3}{5b^2} \cdot \frac{15b^4}{28a^6} =$
$= \frac{12a^3 \cdot 15b^4}{5b^2 \cdot 28a^6} = \frac{3 \cdot 4a^3 \cdot 5b^2 \cdot 3b^2}{5b^2 \cdot 4a^3 \cdot 7a^3} = \frac{3 \cdot 3b^2}{7a^3} = \frac{9b^2}{7a^3}$.

Пример 2

Перемножим дроби $\frac{2ab + b^2}{3a}$ и $\frac{6a^2}{4a^2 - b^2}$.

Воспользуемся правилом умножения дробей. Затем числитель первой дроби и знаменатель второй дроби разложим на множители и сократим получившуюся дробь. Имеем: $\frac{2ab + b^2}{3a} \cdot \frac{6a^2}{4a^2 - b^2} =$
$= \frac{(2ab + b^2) \cdot 6a^2}{3a(4a^2 - b^2)} = \frac{b(2a + b) \cdot 6a^2}{3a(2a - b)(2a + b)} = \frac{b \cdot 2a}{2a - b} = \frac{2ab}{2a - b}$.

Пример 3

Представим произведение дробей $\frac{a - b}{a + 3b}$ и $\frac{a + b}{a - 2b}$ в виде алгебраической дроби.

Используем правило умножения дробей. В числителе и знаменателе получившейся дроби умножим многочлены. Тогда получим: $\frac{a - b}{a + 3b} \cdot \frac{a + b}{a - 2b} = \frac{(a - b)(a + b)}{(a + 3b)(a - 2b)} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - 2ab + 3ab - 6b^2} =$
$= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + ab - 6b^2}$.

Пример 4

Перемножим дробь $\frac{x + 2y}{x + y}$ и многочлен $x^2 - y^2$.

Как и при сложении (вычитании) дробей представим многочлен в виде дроби со знаменателем 1 и воспользуемся правилом умножения дробей. Имеем: $\frac{x+2y}{x+y}\cdot(x^2-y^2)=\frac{x+2y}{x+y}\cdot\frac{x^2-y^2}{1}=$

$$=\frac{(x+2y)(x^2-y^2)}{(x+y)\cdot 1}=\frac{(x+2y)(x-y)(x+y)}{x+y}=(x+2y)(x-y)=$$
$$=x^2-xy+2xy-2y^2=x^2+xy-2y^2.$$

Правило умножения дробей, разумеется, справедливо для произведения любого числа перемножаемых дробей.

Пример 5

Найдем произведение дробей $\frac{2a}{3a-2b}$, $\frac{9a^2-4b^2}{8a^2b}$ и $\frac{3b^2}{3a+2b}$.

Используем правило умножения дробей и получим: $\frac{2a}{3a-2b}\cdot\frac{9a^2-4b^2}{8a^2b}\cdot\frac{3b^2}{3a+2b}=\frac{2a\cdot(9a^2-4b^2)\cdot 3b^2}{(3a-2b)\cdot 8a^2b\cdot(3a+2b)}=$

$$=\frac{2a\cdot(3a-2b)(3a+2b)\cdot 3b^2}{(3a-2b)\cdot 8a^2b\cdot(3a+2b)}=\frac{3b}{4a}.$$

Теперь рассмотрим возведение дроби в степень. **При возведении обыкновенной дроби в степень ее числитель и знаменатель возводят в эту степень.** Например, $\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{2^4}{3^4}=\frac{16}{81}$. **Такое же правило справедливо и в случае алгебраической дроби:** $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$.

Пример 6

Возведем дробь $\frac{3a^2}{2b^3}$ в четвертую степень.

Используем правило возведения дроби в степень и учтем свойства степеней. Получаем: $\left(\frac{3a^2}{2b^3}\right)^4=\frac{(3a^2)^4}{(2b^3)^4}=\frac{3^4\cdot(a^2)^4}{2^4\cdot(b^3)^4}=\frac{81a^8}{16b^{12}}$.

Пример 7

Возведем в квадрат дробь $\frac{a^2-1}{a^2+2a+1}$.

Используем формулы сокращенного умножения и сначала сократим дробь: $\frac{a^2-1}{a^2+2a+1}=\frac{(a-1)(a+1)}{(a+1)^2}=\frac{a-1}{a+1}$. Теперь возведем в квадрат эту дробь. Для этого возведем в квадрат ее числитель и знаменатель (правило возведения дроби в степень). Получаем: $\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2=\frac{(a-1)^2}{(a+1)^2}=\frac{a^2-2a+1}{a^2+2a+1}$.

III. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте правило умножения дробей.
2. Как возвести дробь в степень?

IV. Задание на уроке

№ 5.4 (б); 5.7 (в); 5.12 (б); 5.17 (в); 5.18 (б); 5.21 (а); 5.22 (в); 5.25 (а, б); 5.30 (а); 5.43 (б).

V. Задание на дом

№ 5.4 (в); 5.7 (а); 5.12 (г); 5.17 (б); 5.18 (в); 5.21 (в); 5.22 (б); 5.25 (в, г); 5.30 (в); 5.43 (в).

VI. Подведение итогов урока

Урок 10. Деление алгебраических дробей

Цель: изучить деление дробей.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (тест).

Вариант 1

1. Выполните умножение $\frac{42x^3y^4}{z^5}\cdot\frac{z^2}{7(xy)^2}$.

Ответы: а) $\frac{6xy}{z^3}$; б) $\frac{6xy^2}{z^3}$; в) $\frac{6x^2y^2}{z^4}$.

2. Перемножьте дроби $\frac{a^2-6a+9}{a^2-3a+9}\cdot\frac{a^3+27}{4a-12}$.

Ответы: а) $\frac{a^2-9}{4}$; б) $\frac{(a-3)^2}{4}$; в) $\frac{(a+3)^2}{4}$.

3. Упростите выражение $\frac{x^2-ax+bx-ab}{x^2+ax-bx-ab}\cdot\frac{x^2+2ax+a^2}{x^2-2bx+b^2}$.

Ответы: а) $\frac{x-a}{x-b}$; б) $\frac{(x-a)^2}{(x-b)^2}$; в) $\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}$.

Вариант 2

1. Выполните умножение $\frac{48x^5y^7}{z^4}\cdot\frac{z^3}{8(xy)^2}$.

Ответы: а) $\frac{6x^2y^4}{z}$; б) $\frac{6x^3y^5}{z^2}$; в) $\frac{6x^3y^5}{z}$.

2. Перемножьте дроби $\frac{a^3-8}{3a+6}\cdot\frac{a^2+4a+4}{a^2+2a+4}$.

Ответы: а) $\frac{a^2-4}{3}$; б) $\frac{(a-2)^2}{3}$; в) $\frac{(a+2)^2}{3}$.

3. Упростите выражение $\frac{x^2-ax+bx-ab}{x^2-ax-bx+ab}\cdot\frac{x^2-2bx+b^2}{x^2-2ax+a^2}$.

Ответы: а) $\frac{x^2-b^2}{(x-a)^2}$; б) $\frac{(x-b)^2}{x^2-a^2}$; в) $\frac{(x+b)^2}{(x-a)^2}$.

III. Изучение нового материала

При делении обыкновенных дробей операцию деления заменяют операцией умножения. При этом первую дробь умножают на дробь, обратную второй. Например, $\frac{3}{7}:\frac{5}{11}=\frac{3}{7}\cdot\frac{11}{5}=\frac{33}{35}$. **Таким же образом можно делить и алгебраические дроби, т. е.** $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$.

Пример 1

Разделим дробь $\frac{15x^3}{4y^4}$ на дробь $\frac{5x^2}{2y}$.

Используя правило деления дробей, получим: $\frac{15x^3}{4y^4}:\frac{5x^2}{2y}=$

$=\frac{15x^3}{4y^4}\cdot\frac{2y}{5x^2}=\frac{15x^3\cdot 2y}{4y^4\cdot 5x^2}=\frac{3x}{2y^3}$.

Пример 2

Разделим дробь $\frac{a-1}{a+3}$ на дробь $\frac{3-a}{a+1}$.

Воспользуемся правилом деления дробей. Имеем: $\frac{a-1}{a+3}:\frac{3-a}{a+1}=$

$=\frac{a-1}{a+3}\cdot\frac{a+1}{3-a}=\frac{(a-1)(a+1)}{(a+3)(3-a)}=\frac{(a-1)(a+1)}{(3+a)(3-a)}=\frac{a^2-1}{9-a^2}$.

Пример 3

Разделим многочлен $a-2b$ на дробь $\frac{a^2-4b^2}{5ab}$.

При делении многочлена на дробь (или наоборот), как и ранее, записывают многочлен в виде дроби со знаменателем 1 и используют правило деления дробей. Имеем: $(a-2b):\frac{a^2-4b^2}{5ab}=$

$=\frac{a-2b}{1}:\frac{a^2-4b^2}{5ab}=\frac{a-2b}{1}\cdot\frac{5ab}{a^2-4b^2}=\frac{(a-2b)\cdot 5ab}{1\cdot(a-2b)(a+2b)}=\frac{5ab}{a+2b}$.

С делением алгебраических дробей связано значительное число самых разнообразных задач.

Пример 4

Найдем допустимые значения переменной дробного выражения

$\frac{3-\frac{x}{x+2}}{5+\frac{x+1}{x+3}}$. Представим это выражение в виде дроби.

Числитель этого выражения $3-\frac{x}{x+2}$ имеет смысл при всех значениях x, кроме $x=-2$ (т. к. делить на нуль нельзя). Упростим это выражение: $3-\frac{x}{x+2}=\frac{3}{1}-\frac{x}{x+2}=\frac{3(x+2)-x}{x+2}=\frac{3x+6-x}{x+2}=$

$= \frac{2x+6}{x+2} = \frac{2(x+3)}{x+2}$. Знаменатель этого выражения $5+\frac{x+1}{x+3}$ имеет смысл при всех значениях x, кроме $x = -3$.

Преобразуем это выражение: $5+\frac{x+1}{x+3} = \frac{5}{1}+\frac{x+1}{x+3} = \frac{5(x+3)+x+1}{x+3} =$

$= \frac{5x+15+x+1}{x+3} = \frac{6x+16}{x+3} = \frac{2(3x+8)}{x+3}$.

Эта дробь обращается в нуль, если ее числитель $2(3x+8) = 0$. Из этого уравнения найдем $x = -\frac{8}{3}$.

Теперь разделим числитель $\frac{2(x+3)}{x+2}$ данного выражения на знаменатель $\frac{2(3x+8)}{x+3}$, используя правило деления дробей. Имеем:

$$\frac{2(x+3)}{x+2} : \frac{2(3x+8)}{x+3} = \frac{2(x+3)}{x+2} \cdot \frac{x+3}{2(3x+8)} = \frac{(x+3)^2}{(x+2)(3x+8)} = \frac{x^2+6x+9}{3x^2+8x+6x+16} =$$

$= \frac{x^2+6x+9}{3x^2+14x+16}$. Итак, данное выражение имеет смысл при всех значениях x таких, что $x \neq -2$, $x \neq -3$ и $x \neq -\frac{8}{3}$. После преобразований данное выражение записано в виде рациональной дроби $\frac{x^2+6x+9}{3x^2+14x+16}$.

Пример 5

Известно, что $\frac{4b+a}{b+a} = 3$. Найдем величину $\frac{2a^2-ab+3b^2}{3a^2+5b^2}$.

По определению частного из равенства $\frac{4b+a}{b+a} = 3$ получаем: $4b+a = 3(b+a)$, или $4b+a = 3b+3a$, откуда $b = 2a$. Теперь найдем величину $\frac{2a^2-ab+3b^2}{3a^2+5b^2}$, подставив величину $b = 2a$. Имеем:

$$\frac{2a^2-a\cdot 2a+3\cdot(2a)^2}{3a^2+5\cdot(2a)^2} = \frac{2a^2-2a^2+12a^2}{3a^2+20a^2} = \frac{12a^2}{23a^2} = \frac{12}{23}.$$

Пример 6

Известно, что $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Докажем, что $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

Обозначим отношения $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ буквой x. Из равенства $\frac{a}{b}=x$ получаем $a = bx$, из равенства $\frac{c}{d}=x$ имеем $c = dx$. Найдем отношение $\frac{a+b}{a-b}=\frac{bx+b}{bx-b}=\frac{b(x+1)}{b(x-1)}=\frac{x+1}{x-1}$ и отношение $\frac{c+d}{c-d}=\frac{dx+d}{dx-d}=$ $=\frac{d(x+1)}{d(x-1)}=\frac{x+1}{x-1}$. Сравнивая полученные отношения (равные одной и той же дроби $\frac{x+1}{x-1}$), видно, что $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

Пример 7

При каких натуральных значениях n выражение $\frac{2n-5}{n+2}$ является целым числом?

В дроби $\frac{2n-5}{n+2}$ выделим целое выражение. Для этого в числителе дроби надо выделить слагаемое пропорциональное знаменателю $2n-5=(2n+4)-9=2(n+2)-9$. Тогда, учитывая правило вычитания дробей, можем записать: $\frac{2n-5}{n+2}=\frac{2(n+2)-9}{n+2}=$ $=\frac{2(n+2)}{n+2}-\frac{9}{n+2}=2-\frac{9}{n+2}$. Число 2 является целым. Поэтому, чтобы данная дробь была бы целым числом, надо, чтобы дробь $\frac{9}{n+2}$ являлась бы целым числом. Это возможно только в том случае, если натуральное число $n + 2$ будет делителем числа 9. Число 9 имеет три натуральных делителя: 1, 3 и 9.

Рассмотрим эти случаи. При $n + 2 = 1$ получаем $n = -1$ (число отрицательное), что противоречит условию задачи. Для $n + 2 = 3$ находим $n = 1$. При $n + 2 = 9$ имеем $n = 7$. Итак, только при натуральных значениях $n = 1$ и $n = 7$ дробь $\frac{2n-5}{n+2}$ является целым числом.

Убедимся в этом. Для $n = 1$ данная дробь равна $\dfrac{2\cdot 1-5}{1+2}=\dfrac{-3}{3}=-1$ (целое число), при $n = 7$ дробь равна $\dfrac{2\cdot 7-5}{7+2}=\dfrac{9}{9}=1$ (также целое число).

Пример 8

Найдем целую и дробную часть в выражении $\dfrac{3x^3+2x^2-4x+3}{x-1}$.

Аналогично предыдущей задаче в числителе дроби надо выделить слагаемые пропорциональные знаменателю, сгруппировав его члены. Получаем: $3x^3+2x^2-4x+3=(3x^3-3x^2)+3x^2+2x^2-4x+3=$
$=3x^2(x-1)+5x^2-4x+3=3x^2(x-1)+(5x^2-5x)+5x-4x+3=$
$=3x^2(x-1)+5x(x-1)+x+3=3x^2(x-1)+5x(x-1)+(x-1)+4=$
$=(x-1)(3x^2+5x+1)+4.$

Тогда, учитывая правило сложения дробей, данное выражение можно записать в виде: $\dfrac{3x^3+2x^2-4x+3}{x-1}=\dfrac{(x-1)(3x^2+5x+1)+4}{x-1}=$
$=\dfrac{(x-1)(3x^2+5x+1)}{x-1}+\dfrac{4}{x-1}=3x^2+5x+1+\dfrac{4}{x-1}$. Таким образом, данное выражение $\dfrac{3x^3+2x^2-4x+3}{x-1}$ состоит из целой части $3x^2+5x+1$ и дробной части $\dfrac{4}{x-1}$.

IV. Задание на уроке

№ 5.6 (а); 5.8 (в); 5.11 (б); 5.14 (г); 5.18 (а); 5.20 (б); 5.28 (г); 5.31 (а); 5.36 (г); 5.39 (а); 5.42 (б); 5.44 (а); 5.46 (б).

V. Задание на дом

№ 5.6 (в); 5.8 (а); 5.11 (г); 5.14 (б); 5.18 (г); 5.20 (г); 5.28 (б); 5.31 (б); 5.36 (а); 5.39 (в); 5.42 (г); 5.44 (б); 5.46 (а).

VI. Творческие задания

1. Найти допустимые значения переменной и упростить дробь:

а) $\dfrac{1}{2+\dfrac{3}{x+4}}$; б) $\dfrac{2}{3+\dfrac{1}{x+5}}$;

в) $\dfrac{1+\dfrac{2}{x+3}}{2+\dfrac{3}{x+4}}$; г) $\dfrac{2-\dfrac{3x}{x+1}}{1-\dfrac{x+2}{2x+3}}$.

Ответы: а) $\dfrac{x+4}{2x+11}$ при $x \neq -4$ и $x \neq -5{,}5$; б) $\dfrac{2(x+5)}{3x+16}$ при $x \neq -5$ и $x \neq -\dfrac{16}{3}$; в) $\dfrac{(x+5)(x+4)}{(x+3)(2x+11)}=\dfrac{x^2+9x+20}{2x^2+17x+33}$ при $x \neq -4$, $x \neq -3$ и $x \neq -5{,}5$; г) $\dfrac{(2-x)(2x+3)}{(x+1)^2}=\dfrac{6+x-2x^2}{x^2+2x+1}$ при $x \neq -1{,}5$ и $x \neq -1$.

2. Известно, что $\dfrac{a+4b}{5a-7b}=2$. Найдите:

а) $\dfrac{3a-7b}{a+b}$; б) $\dfrac{2a+9b}{2a+5b}$;

в) $\dfrac{2a^2+3ab-b^2}{a^2-2ab+5b^2}$; г) $\dfrac{a^2-5ab+3b^2}{3a^2-ab+2b^2}$.

Ответы: а) $-\dfrac{1}{3}$; б) $\dfrac{13}{9}$; в) $\dfrac{13}{5}$; г) $-\dfrac{1}{4}$ (по условию задачи найти $a=2b$).

3. Известно, что $a^2+9b^2=6ab$. Найдите:

а) $\dfrac{2a-5b}{a-b}$; б) $\dfrac{3a-b}{2a+b}$;

в) $\dfrac{2a^2-ab+4b^2}{a^2-4b^2}$; г) $\dfrac{3a^2-2ab+5b^2}{a^2-5ab+2b^2}$.

Ответы: а) $\dfrac{11}{4}$; б) 2; в) 5; г) $\dfrac{19}{13}$ (по условию задачи найти $a=-3b$).

4. Известно, что $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$. Докажите, что:

а) $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}$; б) $\dfrac{a}{a+b}=\dfrac{c}{c+d}$;

в) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{a+c}{b+d}$; г) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{na+mc}{nb+md}$;

д) $\dfrac{na+mb}{xa+yb}=\dfrac{nc+md}{xc+yd}$ (указание: обозначьте отношение $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=t$, тогда $a=bt$ и $c=td$).

5. При каких натуральных значениях n выражение является целым числом?

а) $\dfrac{n+3}{n+1}$; б) $\dfrac{5n+8}{n+1}$;

в) $\dfrac{n^2+2n}{n-1}$; г) $\dfrac{2n^2-3n+3}{n-2}$.

Ответы: а) $n=1$; б) $n=2$; в) $n=2$ и $n=4$; г) $n=3$ и $n=7$ (указание: в данном дробном выражении выделите целую и дробную части).

6. При каких целых значениях n выражение также является целым числом?

а) $\dfrac{3n+9}{n+1}$; б) $\dfrac{6n-7}{n-2}$;

в) $\dfrac{4n^2-13n+5}{n-3}$; г) $\dfrac{3n^2+10n-1}{n+4}$.

Ответы: а) −4; −2; 0; 2; б) −3; 1; 3; 7; в) 1; 2; 4; 5; г) −11; −5; −3; 3.

7. В дробном выражении найдите целую и дробную части:

а) $\dfrac{5}{x-3}$; б) $\dfrac{2}{x+1}$; в) $\dfrac{3x-6}{x-2}$;

г) $\dfrac{2x+10}{x+5}$; д) $\dfrac{2x+15}{x+6}$; е) $\dfrac{5x-10}{2x-3}$;

ж) $\dfrac{x^2+x+1}{x+2}$; з) $\dfrac{6x^2+7x+4}{3x-1}$; и) $\dfrac{3x^3-2x^2-3x+5}{x+1}$;

к) $\dfrac{2x^3-x^2-5x+3}{x-2}$.

Ответы: а) целая часть 0, дробная часть $\dfrac{5}{x-3}$; б) целая часть 0, дробная часть $\dfrac{2}{x+1}$; в) целая часть 3, дробная часть 0; г) целая часть 2, дробная часть 0; д) целая часть 2, дробная часть $\dfrac{3}{x+6}$;

е) целая часть 2,5, дробная часть $-\frac{5}{2(2x-3)}=\frac{5}{6-4x}$; ж) целая часть $x-1$, дробная часть $\frac{3}{x+2}$; з) целая часть $2x+3$, дробная часть $\frac{7}{3x-1}$; и) целая часть $3x^2-5x+2$, дробная часть $\frac{3}{x+1}$; к) целая часть $2x^2+3x+1$, дробная часть $\frac{5}{x-2}$ (указание: в числителе дроби выделите слагаемые, пропорциональные знаменателю).

VII. Подведение итогов урока

§ 6. Преобразование рациональных выражений

Уроки 11–12. Алгебраические преобразования

Цель: освоить навыки преобразования рациональных выражений.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Выполните деление $\frac{42a^3b^2}{17c^3}:\frac{14(ab)^2}{51c}$.

2. Найдите результат деления дробей $\frac{b-8}{a^2-4}:\frac{2b-16}{3a-6}$.

3. Упростите выражение $\frac{27+x^3}{81-x^4}:\frac{x^2-3x+9}{x^2+9}$.

Вариант 2

1. Выполните деление $\frac{45a^4b^3}{57c^4}:\frac{15(ab)^3}{19c^2}$.

2. Найдите результат деления дробей $\frac{6a-30}{3b+5}:\frac{a^2-25}{6b+10}$.

3. Упростите выражение $\frac{8+a^3}{16-a^4}:\frac{a^2-2a+4}{a^2+4}$.

III. Изучение нового материала

Новые понятия в математике возникали постепенно, начиная с самых простых. Сначала люди стали использовать **натуральные числа** (1, 2, 3, 4, ...) для подсчета предметов в повседневной практике. Затем понятие числа было расширено и стали рассматривать **целые числа** (0; ±1; ±2; ...) – к ним относятся все натуральные числа, число нуль и целые отрицательные числа (т. е. числа противоположные натуральным).

После этого понятие числа получило дальнейшее развитие и стали изучаться **рациональные числа** ($0;\ 5;\ -3;\ \frac{8}{7};\ -\frac{4}{11};\ \ldots$), к которым относятся все целые числа и все дроби (как положительные, так и отрицательные).

Разумеется, обобщение понятия числа происходило таким образом, что более сложный объект включал в себя более простой (например, все целые числа – часть рациональных чисел). При этом также обобщались и расширялись правила действий с числами.

Напомним, что множество действительных чисел обозначается буквой R, рациональных чисел – буквой Q, целых чисел – буквой Z, натуральных чисел – буквой N. Таким образом, развитие понятия числа происходило в соответствии со следующей схемой.

$$\boxed{\textbf{Натуральные числа } N}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\textbf{Целые числа } Z}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\textbf{Рациональные числа } Q}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\textbf{Действительные числа } R}$$

Аналогично обстоит дело и с алгебраическими выражениями. Сначала рассматриваются самые простые объекты – **числа, переменные и их степени**. Затем изучаются их более сложные образования – **одночлены**. Потом переходят к рассмотрению алгебраических сумм одночленов – **многочленам**. И, наконец, изучаются **алгебраические дроби**.

В этой главе обнаружилась полная аналогия в действиях с обыкновенными дробями и алгебраическими дробями. Это нашло отражение и в математических терминах. Часто многочлены называют целыми выражениями, алгебраические дроби – дробными выражениями.

Любое числовое выражение после выполнения всех действий принимает конкретное числовое значение – рациональное число (в частности, оно может оказаться и натуральным числом, и целым числом, и дробью). Точно так же любое алгебраическое выражение (его часто называют **рациональным выражением**) после выполнения преобразований принимает вид алгебраической дроби (опять же, в частности, может получиться число, одночлен или многочлен).

Пример 1

Рассмотрим рациональное выражение $\left(\frac{1}{y}+\frac{2}{x-y}\right)\left(x-\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)$.

Оно представляет собой произведение двух множителей. Первый множитель является суммой двух алгебраических дробей $\frac{1}{y}$ и $\frac{2}{x-y}$. Результатом сложения будет также алгебраическая дробь. Второй множитель является разностью одночлена x и алгебраической дроби $\frac{x^2+y^2}{x+y}$. Одночлен x можно представить в виде дроби со знаменателем 1. Тогда разностью двух алгебраических дробей также будет алгебраическая дробь. Последней операцией является умножение двух алгебраических дробей. Произведением их вновь будет алгебраическая дробь.

Из примера видно, что преобразование любого рационального выражения сводится к сложению, вычитанию, умножению и делению алгебраических дробей (как следует из правил действий с дробями). Поэтому **любое рациональное выражение можно представить в виде алгебраической дроби.**

Пример 2

Преобразуем выражение из примера 1 в алгебраическую дробь.

Выражение можно преобразовать по действиям, при достаточной практике преобразования можно выполнять и сразу. Рассмотрим эти подходы.

Способ 1. Сначала выполним сложение дробей в первой скобке. Эта операция будет первым действием:

$$1)\ \frac{1}{y}+\frac{2}{x-y}=\frac{1\cdot(x-y)+2\cdot y}{y(x-y)}=\frac{x-y+2y}{y(x-y)}=\frac{x+y}{y(x-y)}.$$

Теперь во второй скобке из одночлена вычтем дробь. Такая операция будет вторым действием:

$$2)\ x-\frac{x^2+y^2}{x+y}=\frac{x}{1}-\frac{x^2+y^2}{x+y}=\frac{x(x+y)-1(x^2+y^2)}{x+y}=\frac{x^2+xy-x^2-y^2}{x+y}=$$

$$=\frac{xy-y^2}{x+y}=\frac{y(x-y)}{x+y}.$$

Наконец, умножим алгебраические дроби, полученные в первом и втором действиях. Эта операция будет третьим действием:

$$3)\ \frac{x+y}{y(x-y)}\cdot\frac{y(x-y)}{x+y}=\frac{(x+y)y(x-y)}{y(x-y)(x+y)}=1.$$

В результате преобразований была получена алгебраическая дробь. В данном случае такая дробь представляет собой число 1.

Способ 2. Параллельно будем выполнять сложение в первой скобке и вычитание во второй скобке. Тогда получаем:

$$\left(\frac{1}{y}+\frac{2}{x-y}\right)\left(x-\frac{x^2-y^2}{x+y}\right)=\frac{x-y+2y}{y(x-y)}\cdot\frac{x(x+y)-(x^2+y^2)}{x+y}=$$

$$=\frac{x+y}{y(x-y)}\cdot\frac{x^2+xy-x^2-y^2}{x+y}=\frac{x+y}{y(x-y)}\cdot\frac{xy-y^2}{x+y}=\frac{(x+y)y(x-y)}{y(x-y)(x+y)}=1\cdot$$

В ряде задач встречаются выражения, которые необходимо упростить (сокращением дроби) до начала выполнения операций.

Пример 3

Упростим выражение $\frac{x^2+4xy+4y^2}{x+2y}-\frac{x^2-4xy+4y^2}{x-2y}$.

Обратим внимание на то, что числитель первой дроби является квадратом суммы, а числитель второй дроби – квадратом разности (формулы сокращенного умножения). Поэтому имеем: $\frac{x^2+4xy+4y^2}{x+2y}-$

$$-\frac{x^2-4xy+4y^2}{x-2y}=\frac{(x+2y)^2}{x+2y}-\frac{(x-2y)^2}{x-2y}=(x+2y)-(x-2y)=$$
$$=x+2y-x+2y=4y.$$

При преобразованиях громоздких дробей (числители и знаменатели которых в свою очередь представляют собой дроби) полезно использовать основное свойство дроби.

Пример 4

Упростим выражение $\dfrac{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-2}{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2}$.

Преобразования данного выражения можно выполнить поразному. Можно преобразовать числитель и знаменатель дроби, затем разделить первый результат на второй. Проще использовать основное свойство дроби. Легко видеть, что общий знаменатель в числителе и знаменателе равен ab. Поэтому умножим числитель и знаменатель данной дроби на выражение ab. Получаем: $\dfrac{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-2}{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2}=$

$$=\frac{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)ab}{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)ab}=\frac{\frac{a}{b}\cdot ab+\frac{b}{a}\cdot ab-2ab}{\frac{a}{b}\cdot ab+\frac{b}{a}\cdot ab+2ab}=\frac{a^2+b^2-2ab}{a^2+b^2+2ab}=\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2+2ab+b^2}=$$
$$=\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}=\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2.$$

В выражениях, в которых повторяется одна и та же величина, удобно ввести новую переменную, обозначив ей повторяющуюся величину.

Пример 5

Упростим выражение $\left(\dfrac{x^2+y^2}{b^2-(x^2+y^2)b}+\dfrac{b}{(x^2+y^2)^2-(x^2+y^2)b}\right)\cdot\dfrac{(x^2+y^2)b}{b-x^2-y^2}$.

Видно, что переменные x и y входят в этот пример только в виде суммы x^2+y^2. Поэтому введем новую переменную $a=x^2+y^2$ и для величин a и b запишем выражение. Имеем:

$$\left(\frac{x^2+y^2}{b^2-(x^2+y^2)b}+\frac{b}{(x^2+y^2)^2-(x^2+y^2)b}\right)\cdot\frac{(x^2+y^2)b}{b-x^2-y^2}=$$

$$=\left(\frac{a}{b^2-ab}+\frac{b}{a^2-ab}\right)\cdot\frac{ab}{b-a}=\left(\frac{a}{b(b-a)}+\frac{b}{a(a-b)}\right)\cdot\frac{ab}{b-a}=$$

$$=\left(\frac{a}{b(b-a)}-\frac{b}{a(b-a)}\right)\cdot\frac{ab}{b-a}=\frac{a\cdot a-b\cdot b}{ab(b-a)}\cdot\frac{ab}{b-a}=\frac{a^2-b^2}{ab(b-a)}\cdot\frac{ab}{b-a}=$$

$$=\frac{(a-b)(a+b)ab}{ab(b-a)(b-a)}=\frac{(a-b)(a+b)}{(b-a)^2}=\frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)^2}=\frac{a+b}{a-b}.$$

Теперь вернемся к старым переменных x и y и получим окончательный ответ: $\frac{a+b}{a-b}=\frac{x^2+y^2+b}{x^2+y^2-b}$.

IV. Задание на уроке

№ 6.2 (а, б); 6.4 (в, г); 6.5 (а); 6.6 (б); 6.7 (а, г); 6.9 (а, б); 6.10 (б); 6.11; 6.13; 6.15; 6.18; 6.20; 6.23.

V. Задание на дом

№ 6.2 (в, г); 6.4 (а, б); 6.5 (г); 6.6 (в); 6.7 (б, в); 6.9 (в, г); 6.10 (а); 6.12; 6.14; 6.17; 6.19; 6.24.

VI. Подведение итогов урока

§ 7. Первые представления о решении рациональных уравнений

Уроки 13–14. Простейшие рациональные уравнения

Цель: дать понятие рационального уравнения, его области допустимых значений и решения.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (тест).

Вариант 1

1. Упростите выражение $\dfrac{\dfrac{a}{b}-1}{2-\dfrac{b+a}{a}}$.

Ответы: а) $\dfrac{b}{a}$; б) $\dfrac{a}{b}$; в) $\dfrac{a-b}{b}$.

2. Найдите значение выражения
$\left(\dfrac{a^2}{a+b}-\dfrac{a^3}{a^2+b^2+2ab}\right):\left(\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{a^2}{a^2-b^2}\right)$ при $a=-0,7$, $b=0,3$.

Ответы: а) $\dfrac{7}{3}$; б) $\dfrac{5}{4}$; в) $\dfrac{7}{4}$.

Вариант 2

1. Упростите выражение $\dfrac{\dfrac{a}{b}-3}{4-\dfrac{a+b}{b}}$.

Ответы: а) -1; б) $\dfrac{a}{b}$; в) $-\dfrac{b}{a}$.

2. Найдите значение выражения
$\left(\dfrac{2a}{2a+b}-\dfrac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right):\left(\dfrac{2a}{4a^2-b^2}+\dfrac{1}{b-2a}\right)$ при $a=0,3$, $b=0,8$.

Ответы: а) $\dfrac{6}{35}$; б) $\dfrac{3}{35}$; в) $-\dfrac{8}{35}$.

III. Изучение нового материала

Уравнение вида $p(x)=0$ (где $p(x)$ – рациональное выражение) называют **рациональным уравнением.** С такими уравнениями мы уже встречались в 7-м классе: линейные и квадратные уравнения можно рассматривать как частные случаи рационального уравнения. Обсудим некоторые особенности решения других рациональных уравнений.

Пример 1

Решим уравнение $\dfrac{3x-2}{4}-\dfrac{2x+1}{3}-\dfrac{x+1}{2}=0$.

Прежде всего отметим, что дроби, входящие в уравнение, существуют при всех значениях переменной x, т. к. их знаменатели являются числами и не содержат переменной. По свойству уравнений умножим все его члены на НОК (4; 3; 2) = 12 и получим: $12\cdot\frac{3x-2}{4}-12\cdot\frac{2x+1}{3}-12\cdot\frac{x+1}{2}=0$, или $3(3x-2)-4(2x+1)-6(2x+1)=0$, или $9x-6-8x-4-6x-6=0$, или $-5x-16=0$. Таким образом, данное рациональное уравнение свелось к линейному уравнению, корень которого $x=-\frac{16}{5}=-3,2$.

Пример 2

Решим уравнение $\frac{3}{x-4}-\frac{23}{x^2-16}=\frac{x+1}{x+4}$.

В отличие от предыдущего примера знаменатели дробей, входящих в уравнение, зависят от переменной x. Поэтому такие дроби (а следовательно, и само уравнение) имеют смысл только при таких значениях переменной, при которых знаменатели не равны нулю, т. е. при $x-4\neq 0$, $x^2-16\neq 0$, $x+4\neq 0$ (откуда $x\neq\pm 4$). Таким образом, данное уравнение имеет смысл при всех значениях x, кроме $x=\pm 4$. Эти значения называют областью допустимых значений (ОДЗ) уравнения.

Умножим все члены уравнения на наименьший общий знаменатель $(x-4)(x+4)$ дробей. Получим: $(x-4)(x+4)\cdot\frac{3}{x-4}-$ $-(x-4)(x+4)\cdot\frac{25}{x^2-16}=(x-4)(x+4)\cdot\frac{x+1}{x+4}$, или $(x+4)\cdot 3-25=(x-4)(x+1)$, или $3x+12-25=x^2-4x+x-4$, или $3x-13=x^2-3x-4$. Перенесем все члены уравнения в правую часть и приведем подобные члены. Имеем квадратное уравнение: $0=x^2-3x-4-3x+13$, или $0=x^2-6x+9$, или $0=(x-3)^2$. Такое уравнение имеет единственный корень $x=3$. Этот корень удовлетворяет условиям $x\neq\pm 4$ (т. е. входит в ОДЗ) уравнения и является его решением.

В ходе решения задачи было введено новое понятие – **область допустимых значений (ОДЗ) уравнения: те значения переменной, при которых существуют выражения, входящие в уравнение.** Понятие ОДЗ чрезвычайно важно при решении уравнений.

Пример 3

Решим уравнение $\frac{3x-1}{6x-3}-\frac{1}{1-4x^2}=\frac{x}{2x+1}$.

Разложим знаменатели дробей на множители, изменим знак перед второй дробью и запишем уравнение в виде $\frac{3x-1}{3(2x-1)}+\frac{1}{(2x-1)(2x+1)}=\frac{x}{2x+1}$. ОДЗ уравнения определяется условиями $2x-1\neq 0$ и $2x+1\neq 0$, откуда $x\neq\pm\frac{1}{2}$. Таким образом, ОДЗ уравнения – все значения переменной x, кроме $x=\pm\frac{1}{2}$.

Умножим все члены уравнения на наименьший общий знаменатель $3(2x-1)(2x+1)$ дробей и получим: $(2x+1)(3x-1)+3=3(2x-1)x$ или $6x^2-2x+3x-1+3=6x^2-3x$. После очевидных преобразований имеем линейное уравнение $4x+2=0$, корень которого $x=-\frac{1}{2}$. Однако этот корень не входит в ОДЗ данного уравнения и не является его решением. Поэтому данное уравнение решений не имеет.

Очень часто к рациональным уравнениям сводится решение текстовых задач.

Пример 4

Катер с собственной скоростью 12 км/ч прошел по течению реки 28 км и против течения реки 10 км, затратив на весь путь 3 ч. Найти скорость течения реки.

Математическая модель задачи – первый этап.

Пусть x км/ч – скорость течения реки. Тогда скорость катера по течению реки $(12+x)$ км/ч и на путь 28 км он затрачивает время $\frac{28}{12+x}$ ч. Скорость катера против течения реки $(12-x)$ км/ч. На путь 10 км он тратит время $\frac{10}{12-x}$ ч. По условию задачи на весь путь было затрачено 3 ч. Получаем рациональное уравнение $\frac{28}{12+x}+\frac{10}{12-x}=3$.

Работа с составленной моделью – второй этап.

ОДЗ уравнения определяется условиями $12+x\neq 0$ и $12-x\neq 0$, откуда $x\neq\pm 12$. Умножим все члены уравнения на наименьший общий знаменатель дроби. Получим: $28(12-x)+10(12+x)=$ $=3(12+x)(12-x)$ или $336-28x+120+10x=432-3x^2$. Перенесем все члены уравнения в левую часть, приведем подобные члены.

Имеем квадратное уравнение: $3x^2 - 18x + 24 = 0$. Разделим все члены уравнения на число 3. Получаем уравнение $x^2 - 6x + 8 = 0$. Для его решения разложим левую часть уравнения на множители, представив слагаемое $-6x$ в виде $-6x = -2x - 4x$. Получаем: $x^2 - 2x - 4x + 8 = 0$, или $(x^2 - 2x) - (4x - 8) = 0$, или $x(x-2) - 4(x-2) = 0$, или $(x-2)(x-4) = 0$. Так как произведение двух множителей равно 0, то один из них равен нулю. Имеем два линейных уравнения: $x - 2 = 0$ (корень $x = 2$) и $x - 4 = 0$ (корень $x = 4$).

Ответ на вопрос задачи – третий этап.

Оба полученных корня входят в ОДЗ данного уравнения, удовлетворяют условию $0 < x < 12$ (т. е. скорость течения реки положительна и меньше собственной скорости катера). Поэтому скорость течения реки или 2 км/ч или 4 км/ч.

Можно сделать проверку ответов (хотя это и лишнее). Если скорость течения реки 2 км/ч, то скорость катера по течению 14 км/ч и он проходит 28 км за 2 ч. Скорость катера против течения 10 км/ч, и он проходит 10 км за 1 ч. Общее время в пути 3 ч.

Если скорость течения реки 4 км/ч, то скорость катера по течению 16 км/ч и он проходит 28 км за $\frac{28}{16} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$ ч = 1 ч 45 мин. Скорость катера против течения 8 км/ч, и он проходит 10 км за $\frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$ ч = 1 ч 15 мин. Общее затраченное время 1 ч 45 мин + + 1 ч 15 мин = 3 ч.

IV. Задание на уроке

№ 7.2; 7.6 (б); 7.7 (г); 7.10 (а, г); 7.11 (в, г); 813 (а, б); 7.17 (г); 7.21 (а, б); 7.22; 7.26; 7.31 (а, б); 7.33 (в, г); 7.38 (б); 7.39 (а).

V. Задание на дом

№ 7.3; 7.6 (г); 7.7 (б); 7.10 (б, в); 7.11 (а, б); 7.13 9в, г); 7.17 (б); 7.21 (в, г); 7.23; 7.27; 7.31 (в, г); 7.33 (а, б); 7.37 (г); 7.38 (а); 7.39 (б).

VI. Подведение итогов урока

§ 8. Степень с отрицательным целым показателем

Уроки 15–16. Отрицательный показатель степени

***Цель*:** расширить понятие степени.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Решите уравнение: $\frac{3}{x}-\frac{6}{x(x+2)}=\frac{1+2x}{x+2}$.

2. Скорость течения реки 3 км/ч. Катер прошел 18 км по течению реки и 24 км – против течения, затратив на весь путь 3 ч. Найдите собственную скорость катера.

Вариант 2

1. Решите уравнение: $\frac{1}{x}-\frac{5}{x(5-x)}=\frac{x-7}{5-x}$.

2. Скорость течения реки 2 км/ч. Катер прошел 32 км по течению реки и 12 км – против течения, затратив на весь путь 3 ч. Найдите собственную скорость катера.

III. Изучение нового материала

Окружающий нас мир очень разнообразен и качественно и количественно. Приведем из справочника по физике сведения о массах двух физических тел: масса Солнца равна $1{,}985\cdot10^{33}$ г (для простоты $\approx2\cdot10^{33}$ г), масса электрона равна $9{,}108\cdot10^{-28}$ г (для простоты $\approx10^{-27}$ г). Обозначения 10^{33} соответствует произведению тридцати трех множителей, каждый из которых равен 10. Давайте поймем смысл записи 10^{-27}.

Последовательно запишем степени числа 10 с показателями 0, 1, 2, … . Получаем последовательность (ряд) чисел: 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, … . В этой записи каждое предыдущее число меньше последующего в 10 раз. Учитывая такую закономерность, распространим нашу запись влево. Перед числом 10^0 надо написать

$\frac{1}{10}=\frac{1}{10^1}$, перед числом $\frac{1}{10^1}$ запишем число $\frac{1}{100}=\frac{1}{10^2}$ и т. д. Тогда получим последовательность (ряд) чисел: ..., $\frac{1}{10^3}$, $\frac{1}{10^2}$, $\frac{1}{10^1}$, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, ...

Как уже было отмечено, закономерность такой последовательности чисел: **показатель степени каждого предыдущего числа на 1 меньше показателя степени последующего числа**. Поэтому по аналогии с числами, стоящими справа от числа 10^0, **числа, стоящие слева от числа 10^0, записывают в виде степени числа 10 с отрицательным показателем**. Тогда вместо $\frac{1}{10^1}$ пишут 10^{-1}, вместо $\frac{1}{10^2}$ пишут 10^{-2} и т. д.

Поэтому рассмотренную последовательность чисел: ..., $\frac{1}{10^3}$, $\frac{1}{10^2}$, $\frac{1}{10^1}$, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, ... можно записать в виде: ..., 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, ... Итак, 10^{-1} означает $\frac{1}{10^1}$, 10^{-2} означает $\frac{1}{10^2}$ и т. д. Такая договоренность принята для степеней с любыми основаниями (кроме нуля). Поэтому получаем следующее определение:

Если $a \neq 0$ и n – целое отрицательное число, то $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$.

Пример 1

По определению степени с целым отрицательным показателем найдем:

а) $2^{-4}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{1}{\frac{1}{9}}=9$;

в) $a^{-3}=\frac{1}{a^3}$; г) $a^{-2}b^{-3}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^3}=\frac{1}{a^2b^3}$.

Отметим, что **выражение 0^n при целом отрицательном n и при $n=0$ не имеет смысла. При натуральном n выражение 0^n имеет смысл и его значение равно нулю.**

Вернемся к началу этого урока.

Масса электрона составляет примерно 10^{-27} г $=\dfrac{1}{10^{27}}$ г $=0,\underbrace{000\ldots0}_{26\text{ нулей}}1$ г.

Попутно подчеркнем разнообразие нашего мира: масса Солнца отличается от массы электрона в $\dfrac{10^{33}}{10^{-27}}=\dfrac{10^{33}}{\frac{1}{10^{27}}}=10^{33}\cdot10^{27}=$ $=10^{60}=1\underbrace{00\ldots0}_{60\text{ нулей}}$ раз (представить такое различие невозможно).

Приведенное определение позволяет решать более сложные задачи.

Пример 2

Вычислим значение выражения $2\cdot3^{-3}+5\cdot9^{-1}-4\cdot3^{-2}$.

Используем определение степени с целым отрицательным показателем и получим: $2\cdot3^{-3}+5\cdot9^{-1}-4\cdot3^{-2}=2\cdot\dfrac{1}{3^3}+5\cdot\dfrac{1}{9}-4\cdot\dfrac{1}{3^2}=$

$$=\frac{2}{27}+\frac{5}{9}-\frac{4}{9}=\frac{2+15-12}{27}=\frac{5}{27}.$$

Пример 3

Упростим выражение $(y^{-1}+x^{-1})\cdot\left(\dfrac{1}{x^{-1}}+\dfrac{1}{y^{-1}}\right)^{-1}$.

Используя определение, получим: $(y^{-1}+x^{-1})\cdot\left(\dfrac{1}{x^{-1}}+\dfrac{1}{y^{-1}}\right)^{-1}=$

$$=\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}+\frac{1}{\frac{1}{y}}\right)^{-1}=\frac{x+y}{xy}\cdot(x+y)^{-1}=\frac{x+y}{xy}\cdot\frac{1}{x+y}=\frac{1}{xy}.$$

Пример 4

Упростим выражение $\left(\dfrac{1+ax^{-1}}{a^{-1}x^{-1}}\cdot\dfrac{a^{-1}}{a^{-1}x-ax^{-1}}\right):\dfrac{ax^{-1}}{x-a}$.

С учетом определения имеем: $\left(\dfrac{1+ax^{-1}}{a^{-1}x^{-1}}\cdot\dfrac{a^{-1}}{a^{-1}x-ax^{-1}}\right):\dfrac{ax^{-1}}{x-a}=$

$$=\left(\frac{1+\frac{a}{x}}{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{x}}\cdot\frac{\frac{1}{a}}{\frac{x}{a}-\frac{a}{x}}\right):\frac{\frac{a}{x}}{x-a}=\left(\frac{x+a}{x}\cdot ax\cdot\frac{x}{x^2-a^2}\right):\frac{a}{x(x-a)}=$$

$$=\frac{(x+a)\cdot ax}{x^2-a^2}\cdot\frac{x(x-a)}{a}=x^2.$$

IV. Контрольные вопросы

1. Дайте определение степени с целым отрицательным показателем.

2. На примерах поясните данное определение.

V. Задание на уроке

№ 8.1 (а, б); 8.3 (в, г); 8.6 (а, в); 8.7; 8.11 (а, б); 8.12 (в, г); 8.13 (а, г); 8.16 (в, г); 8.20 (а, б); 8.22 (а); 8.23 (б); 8.27; 8.31.

VI. Задание на дом

№ 8.1 (в, г); 8.3 (а, б); 8.6 (б, г); 8.8; 8.11 (в, г); 8.12 (а, б); 8.13 (б, в); 8.16 (а, б); 8.20 (в, г); 8.22 (б); 8.23 (а); 8.28; 8.32.

VII. Подведение итогов урока

Уроки 17–18. Контрольная работа № 2 по теме «Алгебраические дроби»

Цель: проверка знаний учащихся с использованием разноуровневых вариантов.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в 6 вариантах различной сложности (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – сложнее, варианты 5, 6 – самые сложные). При этом сложность вариантов нарастает не очень резко. Каждый вариант содержит 6 задач примерно одинаковой сложности (может быть, несколько сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач. Одна задача является резервной (или запасной) и дает некоторую возможность выбора учащимся.

При таких же критериях оценки в случае вариантов 3, 4 дается дополнительно 0,5 балла и в случае вариантов 5, 6 – дополнительно 1,0 балла (учитывая более высокую сложность этих вариантов). Поэтому в случае вариантов 5, 6 оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач.

Выбор вариантов может быть сделан учителем или учащимся (при этом число экземпляров вариантов должно быть достаточным). Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

III. Варианты работы

Вариант 1

1. Найдите допустимые значения переменной дроби $\frac{a+2}{a^2-3a}$ и определите, при каком значении переменной данная дробь равна нулю.

2. Сократите дробь $\frac{4y-2x}{x^2-4y^2}$ и найдите ее значение при $x = 0{,}8$ и $y = 0{,}1$.

3. Выполните действия: $\left(2+\frac{a}{a+1}\right):\frac{6a+4}{3a^2+3a}$.

4. Известно, что $\frac{a}{b}=2$. Найдите значение дроби $\frac{5a+b}{2a+3b}$.

5. При каких целых значениях n выражение $A=\frac{n^2+2n+1}{n}$ также будет целым числом? Найдите число A.

6. Постройте график функции $y=\frac{x^2-3x}{x-3}$. При каких значениях аргумента значения функции отрицательны?

Вариант 2

1. Найдите допустимые значения переменной дроби $\frac{3+a}{a^2-2a}$ и определите, при каком значении переменной данная дробь равна нулю.

2. Сократите дробь $\frac{12y+6x}{x^2-4y^2}$ и найдите ее значение при $x = 1{,}2$ и $y = 0{,}1$.

3. Выполните действия: $\left(\dfrac{2a}{2a-1}+1\right):\dfrac{4a^2-a}{2a-1}$.

4. Известно, что $\dfrac{a}{b}=4$. Найдите значение дроби $\dfrac{2a+3b}{4a+b}$.

5. При каких целых значениях n выражение $A=\dfrac{n^2+3n-1}{n}$ также будет целым числом? Найдите число A.

6. Постройте график функции $y=\dfrac{x^2+x}{x+1}$. При каких значениях аргумента значения функции положительны?

Вариант 3

1. Найдите допустимые значения переменной выражения $\dfrac{a^2-2a}{a^2-a-2}$ и определите, при каких значениях переменной данная рациональная дробь равна нулю.

2. Сократите дробь $\dfrac{ax-ay-bx+by}{ax-bx+2ay-2by}$ и найдите ее значение при $x=1{,}2$ и $y=-0{,}1$.

3. Упростите выражение: $\left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}\right):\dfrac{ab}{a^2-b^2}$.

4. Известно, что $\dfrac{2a-b}{a+b}=1$. Найдите значение дроби $\dfrac{3a-4b}{a+2b}$.

5. При каких целых значениях n выражение $A=\dfrac{n^2+n+3}{n+2}$ также будет целым числом? Найдите число A.

6. Постройте график функции $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$. При каких значениях аргумента значения функции неположительны?

Вариант 4

1. Найдите допустимые значения переменной выражения $\dfrac{a^2+3a}{a^2+2a-3}$ и определите, при каких значениях переменной данная рациональная дробь равна нулю.

2. Сократите дробь $\dfrac{ax-2ay+bx-2by}{ax+bx+ay+by}$ и найдите ее значение при $x=1{,}3$ и $y=-0{,}3$.

3. Упростите выражение: $\left(\dfrac{a-b}{a+b}-\dfrac{a+b}{a-b}\right):\dfrac{b^2}{a^2-b^2}$.

4. Известно, что $\dfrac{3a-5b}{a-b}=1$. Найдите значение дроби $\dfrac{2a-3b}{2a+b}$.

5. При каких целых значениях n выражение $A=\dfrac{n^2+2n+2}{n+3}$ также будет целым числом? Найдите число A.

6. Постройте график функции $y=\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$. При каких значениях аргумента значения функции неположительны?

Вариант 5

1. Найдите допустимые значения переменной выражения $\dfrac{a^3-4a}{a^2-a-2}$ и определите, при каких значениях переменной данная рациональная дробь равна нулю.

2. Сократите дробь $\dfrac{a^2-ac+b^2+2ab-bc}{ab+ac+b^2-c^2}$.

3. Упростите выражение $\left(\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{2b^2}{b^2-a^2}\right)\cdot\dfrac{a-b}{a^2+2ab+b^2}$.

4. Известно, что $\dfrac{3a+b}{a+2b}=2$. Найдите значение дроби $\dfrac{2a^2-ab+b^2}{3a^2-2ab+b^2}$.

5. Найдите целочисленные решения уравнения $xy+3x-2y=9$.

6. Постройте график уравнения $\left(y-\dfrac{x^2-5x+4}{x-1}\right)(y-x^2)(x-1)=0$.

Вариант 6

1. Найдите допустимые значения переменной выражения $\dfrac{a^3-9a}{a^2+2a-3}$ и определите, при каких значениях переменной данная рациональная дробь равна нулю.

2. Сократите дробь $\frac{a^2+ac+b^2-2ab-bc}{ab+2bc-ac-b^2-c^2}$.

3. Упростите выражение $\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2}-\frac{a}{a-b}\right):\frac{a+b}{2}$.

4. Известно, что $\frac{a+4b}{2a-b}=2$. Найдите значение дроби $\frac{a^2-2ab+3b^2}{2a^2+ab+b^2}$.

5. Найдите целочисленные решения уравнения $xy+3y-x=6$.

6. Постройте график уравнения $\left(y-\frac{x^2-x-2}{x+1}\right)(y+x^2)(x+1)=0$.

Урок 19. Итоги контрольной работы

Цели: сообщить результаты работы, рассмотреть наиболее типичные ошибки, разобрать трудные задачи.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Итоги контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения.

Данные о результатах работы удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи / Итоги	1	2	3	...	6
+	5				
±	1				
—	1				
Ø	1				

Обозначения:

+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;
± – число решивших задачу со значительными ошибками;
— – число не решивших задачу;
Ø – число не решавших задачу.

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.

3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, решившими эту задачу).

4. Разбор всей контрольной работы (вывесить на стенде ответы к заданиям вариантов и разбор наиболее трудных вариантов).

III. Ответы и решения

Ответы

Вариант 1

1. *Ответ*: любые a, кроме $a = 0$ и $a = 3$; $a = -2$.

2. *Ответ*: $-\dfrac{2}{x+2y}$; -2.

3. *Ответ*: $\dfrac{3}{2}a$ (при $a \neq 0$, $a \neq -1$, $a \neq -\dfrac{2}{3}$).

4. *Ответ*: $\dfrac{11}{7}$.

5. *Ответ*: при $n = 1$ $A = 4$, при $n = -1$ $A = 0$.

6. *Ответ*: график $y = x$ $(x \neq 3)$; $x < 0$.

Вариант 2

1. *Ответ*: любые a, кроме $a = 0$ и $a = 2$; $a = -3$.

2. *Ответ*: $\dfrac{6}{x-2y}$; 6.

3. *Ответ*: $\dfrac{1}{a}$ (при $a \neq 0$, $a \neq \dfrac{1}{2}$, $a \neq \dfrac{1}{4}$).

4. *Ответ*: $\dfrac{11}{17}$.

5. *Ответ*: при $n = 1$ $A = 3$, при $n = -1$ $A = 3$.

6. *Ответ*: график $y = x$ $(x \neq -1)$; $x > 0$.

Вариант 3

1. *Ответ*: любые a, кроме $a = 2$ и $a = -1$; $a = 0$.

2. *Ответ*: $\dfrac{x-y}{x+2y}$; 1,3.

3. *Ответ*: 4 (при $a, b \neq 0$, $a \neq \pm b$).

4. *Ответ*: $\dfrac{1}{2}$.

5. *Ответ*: при $n = -1$ $A = 3$, при $n = -3$ $A = -9$, при $n = 3$ $A = 3$, при $n = -7$ $A = -9$.

6. *Ответ*: график $y = x - 2$ $(x \neq 1)$; $x \leq 2$ $(x \neq 1)$.

Вариант 4

1. *Ответ*: любые a, кроме $a = -3$ и $a = 1$; $a = 0$.

2. *Ответ*: $\dfrac{x-2y}{x+y}$; 1,9.

3. *Ответ*: $-4\dfrac{a}{b}$ (при $b \neq 0$, $a \neq \pm b$).

4. *Ответ*: $\dfrac{1}{5}$.

5. *Ответ*: при $n = -2$ $A = 2$, при $n = -4$ $A = -10$, при $n = 2$ $A = 2$, при $n = -8$ $A = -10$.

6. *Ответ*: график $y = x - 3$ $(x \neq 2)$; $x \leq 3$ $(x \neq 2)$.

Решения

Вариант 5

1. Разложим числитель дроби на множители, используя формулу разности квадратов. При разложении знаменателя используем способ группировки: $a^2 - a - 2 = a^2 - 2a + a - 2 = (a^2 - 2a) + (a - 2) = = a(a-2) + (a-2) = (a-2)(a+1)$. Запишем дробь в виде: $\dfrac{a^3 - 4a}{a^2 - a - 2} = = \dfrac{a(a^2-4)}{(a-2)(a+1)} = \dfrac{a(a-2)(a+2)}{(a-2)(a+1)}$. Дробь имеет смысл, если ее знаменатель не равен нулю. Из условия $(a-2)(a+1) \neq 0$ находим, что $a \neq 2$ и $a \neq -1$. Поэтому допустимые значения переменной a для данного выражения – любые значения a, кроме $a = 2$ и $a = -1$.

Дробь равна нулю, если ее числитель равен нулю, а знаменатель при этом в нуль не обращается. Числитель $a(a-2)(a+2) = 0$ при $a = 0$, $a = 2$ (но при этом значении a и знаменатель равен нулю) и $a = -2$.

Ответ: любые a, кроме $a = 2$ и $a = -1$; $a = 0$ и $a = -2$.

2. Используя способ группировки и формулу разности квадратов, разложим числитель и знаменатель дроби на множители и сократим ее. Получаем: $\dfrac{a^2 - ac + b^2 + 2ab - bc}{ab + ac + b^2 - c^2} = \dfrac{(a^2 + 2ab + b^2) - (ac + bc)}{(ab + ac) + (b^2 - c^2)} =$

$$= \frac{(a+b)^2 - c(a+b)}{a(b+c) + (b+c)(b-c)} = \frac{(a+b)(a+b-c)}{(b+c)(a+b-c)} = \frac{a+b}{b+c}.$$

Ответ: $\dfrac{a+b}{b+c}$.

3. Используя правила действий с дробями, упростим выражение.

Имеем: $\left(\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{2b^2}{b^2-a^2}\right)\cdot\dfrac{a-b}{a^2+2ab+b^2}=$

$=\left(\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{2b^2}{(a-b)(a+b)}\right)\cdot\dfrac{a-b}{(a+b)^2}=$

$=\dfrac{a(a+b)-a(a-b)+2b^2}{(a-b)(a+b)}\cdot\dfrac{a-b}{(a+b)^2}=\dfrac{a^2+ab-a^2+ab+2b^2}{(a-b)(a+b)}\cdot\dfrac{a-b}{(a+b)^2}=$

$=\dfrac{2b(a+b)}{(a-b)(a+b)}\cdot\dfrac{a-b}{(a+b)^2}=\dfrac{2b(a-b)}{(a-b)(a+b)^2}=\dfrac{2b}{(a+b)^2}.$

Ответ: $\dfrac{2b}{(a+b)^2}$.

4. Из выражения $\dfrac{3a+b}{a+2b}=2$ получим: $3a+b=2(a+2b)$, или $3a+b=2a+4b$, или $a = 3b$. Теперь подставим это соотношение и найдем значение данной дроби: $\dfrac{2a^2-ab+b^2}{3a^2-2ab+b^2}=\dfrac{2\cdot(3b)^2-3b\cdot b+b^2}{3\cdot(3b)^2-2\cdot 3b\cdot b+b^2}=$

$=\dfrac{18b^2-3b^2+b^2}{27b^2-6b^2+b^2}=\dfrac{16b^2}{22b^2}=\dfrac{8}{11}.$

Ответ: $\dfrac{8}{11}$.

5. Из уравнения $xy+3x-2y=9$ выразим, например, переменную x. Получаем: $x(y+3)=2y+9$, откуда $x=\dfrac{2y+9}{y+3}=\dfrac{(2y+6)+3}{y+3}=$

$=\dfrac{2(y+3)+3}{y+3}=2+\dfrac{3}{y+3}$. По условию x и y должны быть целыми числами. Это возможно только, если дробь $\dfrac{3}{y+3}$ будет целым числом. Для этого $y + 3$ должно быть делителем числа 3 (т. е. равняться ±1; ±3). Поэтому имеем:

а) при $y + 3 = 1$ (т. е. при $y = -2$) $x=2+\dfrac{3}{1}=5$;

б) при $y + 3 = -1$ (т. е. при $y = -4$) $x = 2+\frac{3}{-1} = -1$;

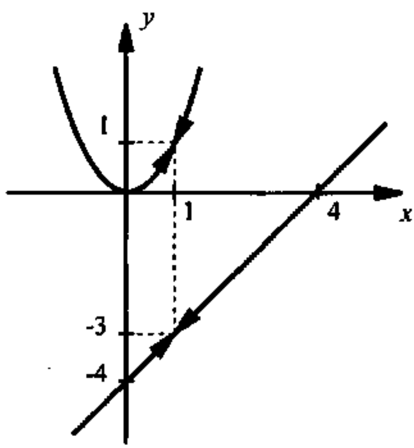
в) при $y + 3 = 3$ (т. е. при $y = 0$) $x = 2+\frac{3}{3} = 3$;

г) при $y + 3 = -3$ (т. е. при $y = -6$) $x = 2+\frac{3}{-3} = 1$.

Ответ: (5; −2), (−1; −4), (3; 0), (1; −6).

6. Учтем ОДЗ данного выражения $x - 1 \neq 0$ (т. е. $x \neq 1$). Поэтому данное уравнение равносильно равенству $\left(y-\frac{x^2-5x+4}{x-1}\right)(y-x^2)=0$.

Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю, а другие имеют смысл. Поэтому надо построить зависимости $y=\frac{x^2-5x+4}{x-1}$ (или после сокращения $y = x - 4$) и $y = x^2$ при условии $x \neq 1$.



Ответ: см. рисунок.

Вариант 6

1. Разложим числитель дроби на множители, используя формулу разности квадратов.

При разложении знаменателя используем способ группировки: $a^2+2a-3=a^2+3a-a-3=(a^2+3a)-(a+3)=a(a+3)-(a+3)=$

$=(a+3)(a-1)$.

Запишем дробь в виде: $\dfrac{a^3-9a}{a^2+2a-3}=\dfrac{a(a^2-9)}{(a+3)(a-1)}=\dfrac{a(a-3)(a+3)}{(a+3)(a-1)}$.

Дробь имеет смысл, если ее знаменатель не равен нулю. Из условия $(a+3)(a-1)\neq 0$ находим, что $a\neq -3$ и $a\neq 1$. Поэтому допустимые значения переменной a для данного выражения – любые значения a, кроме $a=-3$ и $a=1$.

Дробь равна нулю, если ее числитель равен нулю, а знаменатель при этом в нуль не обращается. Числитель $a(a-3)(a+3)=0$ при $a=0$, $a=3$, $a=-3$ (но при этом значении a и знаменатель равен нулю).

Ответ: любые a, кроме $a=-3$ и $a=1$; $a=0$ и $a=3$.

2. Используя способ группировки и формулу разности квадратов, разложим числитель и знаменатель дроби на множители и сократим ее.

Получаем: $\dfrac{a^2+ac+b^2-2ab-bc}{ab+2bc-ac-b^2-c^2}=\dfrac{(a^2-2ab+b^2)+(ac-bc)}{(ab-ac)-(b^2-2bc+c^2)}=$

$=\dfrac{(a-b)^2+c(a-b)}{a(b-c)-(b-c)^2}=\dfrac{(a-b)(a-b+c)}{(b-c)(a-b+c)}=\dfrac{a-b}{b-c}$.

Ответ: $\dfrac{a-b}{b-c}$.

3. Используя правила действий с дробями, упростим выражение.

Имеем: $\left(\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b^2+a^2}{b^2-a^2}-\dfrac{a}{a-b}\right):\dfrac{a+b}{2}=$

$=\left(\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{a^2+b^2}{(a-b)(a+b)}-\dfrac{a}{a-b}\right)\cdot\dfrac{2}{a+b}=\dfrac{a(a-b)-a^2-b^2-a(a+b)}{(a-b)(a+b)}\cdot\dfrac{2}{a+b}=$

$=\dfrac{a^2-ab-a^2-b^2-a^2-ab}{(a-b)(a+b)}\cdot\dfrac{2}{a+b}=\dfrac{-a^2-2ab-b^2}{(a-b)(a+b)}\cdot\dfrac{2}{a+b}=$

$=\dfrac{-(a+b)^2}{(a-b)(a+b)}\cdot\dfrac{2}{a+b}=\dfrac{-(a+b)}{a-b}\cdot\dfrac{2}{a+b}=\dfrac{-(a+b)\cdot 2}{(a-b)(a+b)}=\dfrac{-2}{a-b}=\dfrac{2}{b-a}$.

Ответ: $\dfrac{2}{b-a}$.

4. Из выражения $\frac{a+4b}{2a-b}=2$ получим: $a+4b=2(2a-b)$, или $a+4b=4a-2b$, или $6b = 3a$, или $a = 2b$. Теперь подставим это соотношение и найдем значение данной дроби: $\frac{a^2-2ab+3b^2}{2a^2+ab+b^2}=$

$$=\frac{(2b)^2-2\cdot 2b\cdot b+3b^2}{2\cdot(2b)^2+2b\cdot b+b^2}=\frac{4b^2-4b^2+3b^2}{8b^2+2b^2+b^2}=\frac{3b^2}{11b^2}=\frac{3}{11}.$$

Ответ: $\frac{3}{11}$.

5. Из уравнения $xy+3y-x=6$ выразим, например, переменную x. Получаем: $x(y-1)=-3y+6$, откуда $x=\frac{-3y+6}{y-1}=$

$$=\frac{(-3y+3)+3}{y-1}=\frac{-3(y-1)+3}{y-1}=-3+\frac{3}{y-1}.$$

По условию x и y должны быть целыми числами. Это возможно только, если дробь $\frac{3}{y-1}$ будет целым числом. Для этого $y-1$ должно быть делителем числа 3 (т. е. равняться ± 1; ± 3). Поэтому имеем:

а) при $y-1=1$ (т. е. при $y=2$) $x=-3+\frac{3}{1}=0$;

б) при $y-1=-1$ (т. е. при $y=0$) $x=-3+\frac{3}{-1}=-6$;

в) при $y-1=3$ (т. е. при $y=4$) $x=-3+\frac{3}{3}=-2$;

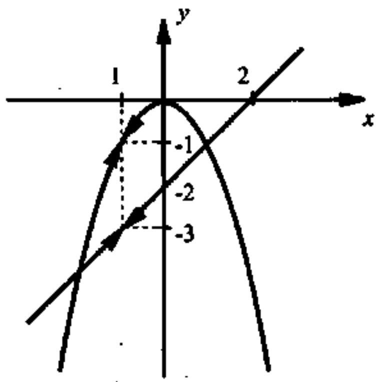
г) при $y-1=-3$ (т. е. при $y=-2$) $x=-3+\frac{3}{-3}=-4$.

Ответ: (0; 2), (−6; 0), (−2; 4), (−4; −2).

6. Учтем ОДЗ данного выражения $x+1\neq 0$ (т. е. $x\neq -1$). Поэтому данное уравнение равносильно равенству $\left(y-\frac{x^2-x-2}{x+1}\right)(y+x^2)=0$.

Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю, а другие имеют смысл. Поэтому надо построить зависимости

$y = \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 1}$ (или после сокращения $y = x - 2$) и $y = -x^2$ при условии $x \neq -1$.



Ответ: см. рисунок.

Уроки № 20–21. Зачетная работа по теме «Алгебраические дроби»

Цель: проверка знаний учащихся по вариантам одинаковой сложности.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Характеристика зачетной работы

Работа составлена в двух равноценных вариантах. По сравнению с контрольной работой увеличено количество заданий. Соответственно у учащихся возрастает возможность выбора задач. Все задания разбиты на блоки А, В и С. Самые простые задачи находятся в части А, более сложные – в части В, еще сложнее – в части С. Каждая задача из блока А оценивается в 1 балл, из блока В – в 2 балла, из блока С – в 3 балла. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов и блока С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» – за 10 баллов, оценка «5» – за 14 баллов.

Так как эта работа является зачетной, то в нее не включены принципиально новые задачи. Поэтому разбору заданий работы отдельного занятия можно и не посвящать (решения задач могут быть вывешены на стенде). Для стендового размещения разбор вариантов приводится.

III. Варианты зачетной работы

Вариант 1

А

1. Найдите область допустимых значений переменной в выражении $A=\frac{x^2-2x+1}{x-1}-\frac{9-6x+x^2}{x-3}$ и вычислите значение A.

2. Упростите выражение $\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{2a}{b}+1\right)\cdot\frac{b}{(a+b)^2}$.

3. Докажите, что значение выражения $\dfrac{\frac{3}{x}+\frac{x+3}{x^2-x}}{\frac{2}{x}-\frac{x-2}{x^2-x}}$ не зависит от переменной x.

4. Упростите выражение $\left(\frac{a+5}{5a-1}+\frac{a+5}{a+1}\right):\frac{a^2+5a}{1-5a}+\frac{a^2+5}{a+1}$.

5. Найдите целочисленные решения уравнения $(x-1)(y+3)=7$.

6. Решите уравнение $\frac{x}{x-2}-\frac{4}{x+2}=\frac{8}{x^2-4}$.

7. Вычислите: $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}\cdot10^{-1}+(1,7)^0-\left(\frac{5}{4}\right)^{-1}+(-5)^{-2}\cdot5^3$.

В

8. Упростите выражение

$$\left(\frac{a^2-2a+4}{4a^2-1}\cdot\frac{2a^2+a}{a^3+8}-\frac{a+2}{2a^2-a}\right):\frac{4}{a^2+2a}-\frac{a+4}{3-6a}.$$

9. Найдите область допустимых значений переменной в выражении

$A=\dfrac{1+\frac{x-1}{x+3}}{2-\frac{x+1}{x-2}}$ и определите, при каком значении переменной $A=0$.

10. При каком целом значении n дробь $A=\frac{2n^2-n+3}{2n-1}$ будет целым числом?

11. Упростите выражение $\dfrac{a^{-n}+b^{-n}}{a^{-2n}-b^{-2n}}:\left(\dfrac{1}{b^{-n}}-\dfrac{1}{a^{-n}}\right)^{-1}$.

С

12. При каких значениях a и b равенство $\dfrac{a}{x+5}+\dfrac{b}{(x-2)^2}=$ $=\dfrac{x+24}{x^3+x^2-16x+20}$ является тождеством?

13. Найдите целочисленные решения уравнения $x^2+2xy=$ $=3x+6y+2$.

14. Найдите сумму дробей: $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{99\cdot 100}$.

Вариант 2

А

1. Найдите область допустимых значений переменной в выражении $A=\dfrac{4-4x+x^2}{x-2}-\dfrac{x^2+6x+9}{x+3}$ и вычислите значение A.

2. Упростите выражение $\left(1-\dfrac{2x}{y}+\dfrac{x^2}{y^2}\right)\cdot\dfrac{y}{(x-y)^2}$.

3. Докажите, что значение выражения $\dfrac{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{4-x}{x^2-x}}{\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{x+2}{x^2-x}}$ не зависит от переменной x.

4. Упростите выражение $\left(\dfrac{a-3}{7a-4}+\dfrac{a-3}{a-4}\right)\cdot\dfrac{7a-4}{9a-3a^2}-\dfrac{a^2-14}{4-a}$.

5. Найдите целочисленные решения уравнения $(x+2)(y-3)=5$.

6. Решите уравнение $\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{6}{x+3}=\dfrac{18}{x^2-9}$.

7. Вычислите: $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-1}\cdot 10^{-1}-(3{,}8)^0+\left(\dfrac{10}{13}\right)^{-1}+(-7)^{-4}\cdot 7^5$.

В

8. Упростите выражение

$$\frac{2-a}{5}+\left(\frac{1}{1-2a}\right)^2:\left(\frac{a+2}{4a^3-4a^2+a}-\frac{2a-a}{1-8a^3}\cdot\frac{4a^2+2a+1}{2a^2+a}\right).$$

9. Найдите область допустимых значений переменной в выражении $A = \dfrac{2 + \dfrac{x-3}{x+1}}{1 - \dfrac{2x+1}{x-2}}$ и определите, при каком значении переменной $A = 0$.

10. При каком целом значении n дробь $A = \dfrac{3n^2 - 2n + 5}{3n - 2}$ будет целым числом?

11. Упростите выражение $\dfrac{a^{-2n} - b^{-2n}}{a^{-n} - b^{-n}} \cdot \left(\dfrac{1}{a^{-n}} + \dfrac{1}{b^{-n}}\right)^{-1}$.

C

12. При каких значениях a и b равенство $\dfrac{a}{x^2 + x - 1} + \dfrac{b}{x - 1} = \dfrac{x^2 + 3x - 3}{x^3 - 2x + 1}$ является тождеством?

13. Найдите целочисленные решения уравнения $2xy + y^2 = 4x + 2y + 3$.

14. Найдите сумму дробей: $\dfrac{2}{1 \cdot 3} + \dfrac{2}{3 \cdot 5} + \dfrac{2}{5 \cdot 7} + \ldots + \dfrac{2}{99 \cdot 101}$.

IV. Разбор заданий зачетной работы

Вариант 1

1. *Ответ*: любые a, кроме $x = 1$ и $x = 3$; $A = 2$.

2. *Ответ*: $\dfrac{1}{b}$ при $b \neq 0$ и $a + b \neq 0$.

3. *Ответ*: доказано.

4. *Ответ*: $a - 1$ при $a \neq 0$, $a \neq -1$, $a \neq \dfrac{1}{5}$, $a \neq -5$.

5. *Ответ*: (8; −2), (2; 4), (−6; −4), (0; −10).

6. *Ответ*: $x = 0$.

7. *Ответ*: 5.

8. *Ответ*: $-\dfrac{1}{3}$ при $a \neq \pm\dfrac{1}{2}$, $a \neq -2$, $a \neq 0$.

9. *Ответ*: любые x, кроме $x = -3$, $x = 2$ и $x = 5$; $A = 0$ при $x = -1$.

10. *Ответ*: $n = 2$, $n = -1$, $n = 1$, $n = 0$.

11. *Ответ*: $a^n b^n$.

Решения

12. В левой части равенства сложим дроби, приведя их к общему знаменателю: $\frac{a}{x+5}+\frac{b}{(x-2)^2}=\frac{a}{x+5}+\frac{b}{x^2-4x+4}=$

$$=\frac{a(x^2-4x+4)+b(x+5)}{(x+5)(x^2-4x+4)}=\frac{ax^2-4ax+4a+bx+5b}{x^3+x^2-16x+20}=$$

$$=\frac{ax^2+x(b-4a)+(4a+5b)}{x^3+x^2-16x+20}.$$

При этом в знаменателе дроби были умножены многочлены $x+5$ и x^2-4x+4. В числителе дроби многочлен записан в стандартном виде (т. е. в порядке убывания степеней x). Сравним полученную дробь и дробь $\frac{x^2+24}{x^3+x^2-16x+20}$, стоящую в правой части. Эти дроби имеют одинаковые знаменатели. Числители будут одинаковыми, если при одинаковых степенях x будут равные коэффициенты. Поэтому получаем: $\begin{cases} a=1, \\ b-4a=0, \\ 4a+5b=24. \end{cases}$ Из первого уравнения имеем $a=1$, тогда из второго уравнения $b=4a=4$. Легко проверить, что значения $a=1$ и $b=4$ являются решением и третьего уравнения.

Ответ: $a=1$ и $b=4$.

13. Данное уравнение $x^2+2xy=3x+6y+2$ запишем в виде $(x^2+2xy)-(3x+6y)=2$ и разложим его левую часть на множители: $x(x+2y)-3(x+2y)=2$ или $(x+2y)(x-3)=2$. Так как по условию x и y целые числа, то левая часть уравнения разложена на произведение целых чисел $x+2y$ и $x-3$, которые должны быть делителями правой части (числа 2). Надо рассмотреть четыре случая.

а) $\begin{cases} x+2y=2, \\ x-3=1. \end{cases}$ Решение этой системы $x=4$ и $y=-1$ является целочисленным.

б) $\begin{cases} x+2y=1, \\ x-3=2. \end{cases}$ Решение этой системы $x=5$ и $y=-2$ также является целочисленным.

в) $\begin{cases} x+2y=-2, \\ x-3=-1. \end{cases}$ Решение этой системы $x=2$ и $y=-2$ является целочисленным.

г) $\begin{cases} x+2y=-1, \\ x-3=-2. \end{cases}$ Решение этой системы $x=1$ и $y=-1$ опять является целочисленным.

Итак, данное уравнение имеет четыре целочисленных решения.

Ответ: $(4; -1)$, $(5; -2)$, $(2; -2)$, $(1; -1)$.

14. Надо представить каждую дробь в сумме в виде разности дробей с более простыми знаменателями: $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$, ..., $\frac{1}{99\cdot 100}=\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$. Теперь найдем сумму дробей: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{99\cdot 100}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=$ $=\frac{1}{1}-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$. В сумме (как видно) сокращаются все слагаемые, кроме первой и последней дробей.

Ответ: $\frac{99}{100}$.

Вариант 2

1. *Ответ*: любые a, кроме $x=-3$ и $x=2$; $A=-5$.

2. *Ответ*: $\frac{1}{y}$ при $y \neq 0$ и $x-y \neq 0$.

3. *Ответ*: доказано.

4. *Ответ*: $-a-4$ при $a \neq 0$, $a \neq 3$, $a \neq 4$, $a \neq \frac{4}{7}$.

5. *Ответ*: $(3; 4)$, $(-1; 8)$, $(-7; 2)$, $(-3; -2)$.

6. *Ответ*: $x=0$.

7. *Ответ*: 7.

8. *Ответ*: $\frac{1}{2}$ при $a \neq 0$, $a \neq \pm\frac{1}{2}$.

9. *Ответ*: любые x, кроме $x=-3$, $x=-1$ и $x=2$; $A=0$ при $x=\frac{1}{3}$.

10. *Ответ*: $n=-1$, $n=1$.

11. *Ответ*: $\frac{1}{x^n y^n}$.

Решения

12. В левой части равенства сложим дроби, приведя их к общему знаменателю: $\frac{a}{x^2+x-1}+\frac{b}{x-1}=\frac{a(x-1)+b(x^2+x-1)}{(x^2+x-1)(x-1)}=$

$$=\frac{ax-a+bx^2+bx-b}{x^3-2x+1}=\frac{bx^2+(a+b)x+(-a-b)}{x^3-2x+1}.$$

При этом в знаменателе дроби были умножены многочлены x^2+x-1 и $x-1$. В числителе дроби многочлен записан в стандартном виде (т. е. в порядке убывания степеней x). Сравним полученную дробь и дробь $\frac{x^2+3x-3}{x^3-2x+1}$, стоящую в правой части. Эти дроби имеют одинаковые знаменатели. Числители будут одинаковыми, если при одинаковых степенях x будут равные коэффициенты. Поэтому получаем: $\begin{cases} b=1, \\ a+b=3, \\ -a-b=-3. \end{cases}$ Из первого уравнения имеем $b = 1$, тогда из второго уравнения $a = 3 - b = 2$. Легко проверить, что значения $a = 2$ и $b = 1$ являются решением и третьего уравнения.

Ответ: $a = 2$ и $b = 1$.

13. Данное уравнение $2xy+y^2=4x+2y+3$ запишем в виде $(2xy+y^2)-(4x+2y)=3$ и разложим его левую часть на множители: $y(2x+y)-2(2x+y)=3$ или $(2x+y)(y-2)=3$. Так как по условию x и y целые числа, то левая часть уравнения разложена на произведение целых чисел $2x + y$ и $y - 2$, которые должны быть делителями правой части (числа 3). Надо рассмотреть четыре случая.

а) $\begin{cases} 2x+y=3, \\ y-2=1. \end{cases}$ Решение этой системы $x = 0$ и $y = 3$ является целочисленным.

б) $\begin{cases} 2x+y=1, \\ y-2=3. \end{cases}$ Решение этой системы $x = -2$ и $y = 5$ также является целочисленным.

в) $\begin{cases} 2x+y=-3, \\ y-2=-1. \end{cases}$ Решение этой системы $x=-2$ и $y=1$ является целочисленным.

г) $\begin{cases} 2x+y=-1, \\ y-2=-3. \end{cases}$ Решение этой системы $x=0$ и $y=-1$ опять является целочисленным.

Итак, данное уравнение имеет четыре целочисленных решения.

Ответ: (0; 3), (−2; 5), (−2; 1), (0; −1).

14. Надо представить каждую дробь в сумме в виде разности дробей с более простыми знаменателями: $\frac{2}{1\cdot3}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3\cdot5}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5\cdot7}=\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$, ..., $\frac{2}{99\cdot101}=\frac{1}{99}-\frac{1}{101}$. Теперь найдем сумму дробей: $\frac{2}{1\cdot3}+\frac{2}{3\cdot5}+\frac{2}{5\cdot7}+...+\frac{2}{99\cdot101}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+\frac{1}{99}-\frac{1}{101}=$ $=\frac{1}{1}-\frac{1}{101}=\frac{100}{101}$. В сумме (как видно) сокращаются все слагаемые, кроме первой и последней дробей.

Ответ: $\frac{100}{101}$.

Глава 2. Функция $y = \sqrt{x}$. Свойства квадратного корня

§ 9. Рациональные числа

Уроки 22–23. Множество рациональных чисел

Цель: обсудить рациональные числа и подмножества множества рациональных чисел.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

1. Некоторые символы математического языка

Изучая предыдущую главу, мы уже обсуждали **развитие понятия числа**: от натурального числа до рационального числа. Речь шла о трех множествах чисел:

1) множестве **натуральных** чисел N: 1; 2; 3; 4; ...

2) множестве **целых** чисел Z: 0; ±1; ±2; ...

3) множестве **рациональных** чисел Q: 3; −7; $\frac{17}{5}$; $-\frac{16}{7}$; ...

Далее будем использовать символику, принятую в **теории множеств** (раздел математики, который изучает общие свойства множеств и операции над ними). Поэтому чуть отвлечемся от основной темы и обсудим используемые символы на примере.

Пример 1

Рассмотрим множество A, состоящее из чисел 3, 5, −7, $\frac{11}{15}$, $-\frac{3}{7}$ (элементы множества A). Принято записывать множество с указанием его элементов в виде $A\left\{3, 5, -7, \frac{11}{5}, -\frac{3}{7}\right\}$. Если число является элементом данного множества, то такой факт записывают с помощью символа $\in$ (принадлежит). Например, $3 \in A$, $\frac{11}{5} \in A$ и т. д. Если число не является элементом множества, то этот факт записывают с помощью символа $\notin$ (не принадлежит). Например, $8 \notin A$, $\frac{9}{7} \notin A$ и т. д.

Принятую символику удобно применять и для наших целей:

1) вместо фразы «n – натуральное число» пишут $n \in N$;

2) вместо фразы «m – целое число» пишут $m \in Z$;

3) вместо фразы «r – рациональное число» пишут $r \in Q$.

Теперь рассмотрим множество $B\left\{3,-7,\dfrac{11}{5}\right\}$. Видно, что множество B состоит из части элементов, входящих в множество A, или множество B – часть множества A. В таком случае говорят, что B – **подмножество множества** A, и обозначают символом $\subset$, т. е. $B \subset A$. Рассмотрим множество $C\left\{2,-7,\dfrac{11}{5}\right\}$. Такое множество содержит число 2, которое не входит в множества A и B. Таким образом, множество C не является подмножеством множеств A и B. Такой факт записывают с помощью символа $\not\subset$ (не является подмножеством), т. е. $C \not\subset A$ и $C \not\subset B$.

Обратите внимание: знаки принадлежности $\in$ (данный элемент принадлежит множеству) и включения $\subset$ (одно множество является подмножеством другого) – различные.

Приведем примеры использования рассмотренной символики.

Пример 2

а) $3 \in N$, $3 \in Z$, $3 \in Q$;

б) $-7 \notin N$, $-7 \in Z$, $-7 \in Q$;

в) $\dfrac{11}{5} \notin N$, $\dfrac{11}{5} \notin Z$, $\dfrac{11}{5} \in Q$.

Пример 3

$7 \in [2;\ 9]$; $7 \in [7;\ 9]$; $7 \notin (7;\ 9]$; $7 \notin [8;\ 9]$.

Пример 4

а) $N \subset Z$, $Z \subset Q$, $N \subset Q$, $Q \not\subset N$, $Z \not\subset N$;

б) $(2;\ 4) \subset [2;\ 4]$, $(2;\ 4) \subset [1;\ 5]$, $(2;\ 4) \not\subset [3;\ 5]$, $(2;\ 4) \not\subset [3;\ 6]$.

2. Рациональные числа как бесконечные десятичные периодические дроби

Все рациональные числа можно записывать в одном и том же виде, что следует из примера.

Пример 5

а) Запишем обыкновенную дробь $\frac{3}{11}$ в виде десятичной дроби.

Используем деление уголком и получим $\frac{3}{11} = 0,2727...$

$$\begin{array}{r|l} -30 & \;11 \\ \cline{2-2} \underline{22} & 0{,}2727\ldots \\ -80 & \\ \underline{77} & \\ 30 & \end{array}$$

Видно, что происходит повторение одной и той же группы цифр: $27, 27, 27, \ldots$ Принято записывать в виде: $\frac{3}{11} = 0,(27)$.

Повторяющуюся группу цифр называют **периодом**, а полученную десятичную дробь – **бесконечной десятичной периодической дробью.**

б) Так же запишем обыкновенную дробь $\frac{7}{2}$ в виде десятичной дроби: $\frac{7}{2} = 3,5$. Если к такому числу приписать любое количество нулей, то число не изменится: $3{,}5 = 3{,}50000\ldots = 3{,}5(0)$.

в) Аналогично обстоит дело и с целым числом $-3 = -3{,}000\ldots = -3{,}(0)$.

Таким образом, **любое рациональное число можно записать в виде бесконечной десятичной периодической дроби.**

Заметим, что в примерах б) и в) периодичность была создана искусственно (на самом деле были получены **конечные** десятичные дроби, которые в целях единообразия записи удобно рассматривать как бесконечные периодические).

Верно также и обратное утверждение: **любую бесконечную десятичную периодическую дробь можно представить в виде обыкновенной дроби**, т. е. в виде рационального числа.

Пример 6

Представим в виде обыкновенной дроби бесконечные десятичные периодические дроби: а) 2,(32); б) 2,8(32); в) 0,3(0).

а) Положим $x = 2{,}(32) = 2{,}3232\ldots$. Так как в периоде дроби содержатся две цифры, то умножим x на число 100 и получим $100x = 232{,}3232\ldots$. Найдем разность $100x - x$. Имеем:

$$\begin{array}{r} _{-}100x = 232{,}3232\ldots \\ \underline{x = 2{,}3232\ldots} \end{array}$$

$99x = 230$, откуда находим $x = \dfrac{230}{99} = 2\dfrac{32}{99}$.

б) Положим $x = 2{,}8(32) = 2{,}83232\ldots$. Сначала умножим это число на 10, чтобы в полученном произведении период начинался сразу после запятой: $10x = 28{,}3232\ldots$. Теперь число $10x$ умножим на 100. При этом запятая сместится ровно на один период вправо: $1000x = 2832{,}3232\ldots$. Найдем разность $1000x - 10x$. Получаем:

$$\begin{array}{r} _{-}1000x = 2323{,}3232\ldots \\ \underline{10x = 28{,}3232\ldots} \end{array}$$

$990x = 2804$, откуда находим $x = \dfrac{2804}{990} = \dfrac{1402}{495} = 2\dfrac{412}{495}$.

в) Положим $x = 0{,}2(9)$. Умножим это число на 10 и получим $10x = 2{,}999\ldots$. Теперь число $10x$ умножим на 10. Имеем $100x = 29{,}999\ldots$. Найдем разность $100x - 10x$. Получаем:

$$\begin{array}{r} _{-}100x = 29{,}999\ldots \\ \underline{10x = 2{,}999\ldots} \end{array}$$

$90x = 27$, откуда находим $x = \dfrac{27}{90} = \dfrac{3}{10}$.

Делением уголком легко проверить, что $\dfrac{3}{10}$ можно записать в виде бесконечной десятичной периодической дроби так: $\dfrac{3}{10} = 0{,}3(0)$.

Аналогично можно показать, что $2{,}54(9) = 2{,}55(0)$, $3{,}(9) = 4{,}(0)$ и т. д. Поэтому обычно десятичные дроби с периодом 9 не рассматривают, заменяя их соответствующими дробями с периодом 0.

Основной вывод этого параграфа: множество Q рациональных чисел можно рассматривать как множество чисел вида $\dfrac{m}{n}$ (где m –

целое число, *n* – натуральное число), или как множество бесконечных десятичных периодических дробей.

III. Контрольные вопросы

1. Какие числа относятся к рациональным?

2. В каком виде записываются рациональные числа?

3. Как обозначают множество рациональных чисел?

4. Как записать обыкновенную дробь в виде бесконечной десятичной периодической дроби? Поясните на примере.

5. Как записать бесконечную десятичную периодическую дробь в виде обыкновенной дроби? Поясните на примере.

IV. Задание на уроке

№ 9.1; 9.3; 9.6; 9.8; 9.10 (а, в); 9.11; 9.13; 9.15; 9.17; 9.19; 9.20; 9.24; 9.28.

V. Задание на дом

№ 9.2; 9.4; 9.7; 9.9; 9.10 (б, г); 9.12; 9.14; 9.16; 9.18; 9.21; 9.22; 9.25; 9.29.

VI. Подведение итогов урока

§ 10. Понятие квадратного корня из неотрицательного числа

Урок 24. Квадратный корень

Цель: рассмотреть понятие квадратного корня.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Какие числа относят к рациональным?

2. Представьте в виде десятичной дроби число:

а) $\frac{1}{120}$; б) $\frac{3}{17}$.

3. Запишите десятичную дробь в виде обыкновенной:
а) 1,75; б) 0,(7); в) 0,(37).

Вариант 2

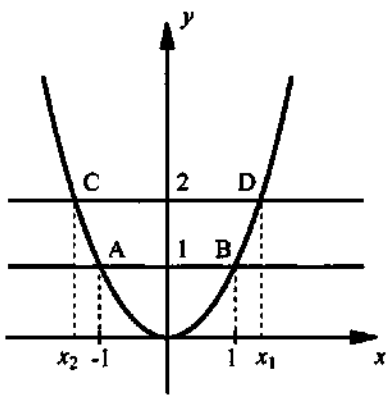
1. В каком виде записывают рациональные числа?
2. Представьте в виде десятичной дроби число:
а) $\frac{1}{160}$; б) $\frac{5}{13}$.
3. Запишите десятичную дробь в виде обыкновенной:
а) 3,25; б) 0,(5); в) 0,(73).

III. Изучение нового материала

Понятие квадратного корня из неотрицательного числа связано с решением простейших квадратных уравнений.

Пример 1

Решим уравнение: а) $x^2 = 1$; б) $x^2 = 2$.



Решим уравнение графически. Для этого построим параболу $y = x^2$.

а) Также построим прямую $y = 1$. Видно, что парабола и прямая пересекаются в точках $A(-1; 1)$ и $B(1; 1)$. Абсциссы этих точек являются корнями уравнения $x^2 = 1$.

б) Разумеется, уравнение $x^2 = 2$ будем решать аналогично. Построим прямую $y = 2$. Парабола и прямая так же пересекаются в двух точках D и C. Однако найти абсциссы x_1 и x_2 этих точек не просто. Можно утверждать, что числа x_1 и x_2 равны по абсолютной величине и противоположны на знаку, т. е. x_2 и x_1. Можно также утверждать, что $1 < |x_1|, |x_2| < 2$. Понятно, что числа x_1 и x_2 не целые.

Возможно, что такие числа являются рациональными, т. е. могут быть представлены в виде $\frac{m}{n}$ (где m – целое число, n – натуральное число). Оказывается, что это не так. Другими словами, не существует такого рационального числа $\frac{m}{n}$, что его квадрат $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ (доказательство будет приведено в следующем примере).

Так как корни уравнения $x^2 = 2$ не являются рациональными числами, то для обозначения таких чисел ввели новый символ $\sqrt{\ }$ (корень квадратный). Тогда корни данного уравнения записывают в виде $x_1 = \sqrt{2}$ и $x_2 = -\sqrt{2}$. Заметим, что числа $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$ являются **иррациональными** (т. е. не рациональными). Из данного примера видно, что возникла необходимость расширения понятия числа и появления новых чисел.

Пример 2

Докажем, что не существует дроби вида $\frac{m}{n}$, квадрат которой $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$.

Докажем **методом от противного**. Предположим, что существует несократимая дробь $\frac{m}{n}$, для которой выполняется равенство $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$. Из этого равенства получаем: $\frac{m^2}{n^2} = 2$ или $m^2 = 2n^2$. Такая запись означает, что число m^2 – четное, а следовательно, и число m – четное. Тогда его можно написать в виде $m = 2k$ (где k – натуральное число). Подставим выражение $m = 2k$ в равенство $m^2 = 2n^2$ и получим: $(2k)^2 = 2n^2$, или $4k^2 = 2n^2$, или $n^2 = 2k^2$. Такое равенство означает, что число n^2 – четное. Следовательно, число n – также четное.

Таким образом, в ходе рассуждений получили, что числа m и n – четные. Следовательно, дробь $\frac{m}{n}$ является сократимой. Этот вывод **противоречит** предположению о несократимости дроби $\frac{m}{n}$. Поэтому предположение о существовании дроби $\frac{m}{n}$, для которой выполнено равенство $\left(\frac{m}{n}\right)^2=2$, является неверным.

Отметим, что мы всегда имеем право говорить о несократимой дроби $\frac{m}{n}$, т. к. если дробь сократима, то после ее сокращения она становится несократимой. Все дальнейшие рассуждения приведены в примере 2.

Таким образом, число $\sqrt{2}$ – некоторое число (свойства которого будут постепенно изучаться), для которого $1<\sqrt{2}<2$, т. к. $1^2<2<2^2$. Можно уточнять величину этого числа и записать:

$1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5$ (т. к. $1{,}4^2<2<1{,}5^2$ или $1{,}96<2<2{,}25$) и

$1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$ (т. к. $1{,}41^2<2<1{,}42^2$ или $1{,}9881<2<2{,}0164$) и т. д.

Аналогично можно записать корни квадратного уравнения $x^2=a$ (где $a>0$): $x_1=\sqrt{a}$ и $x_2=-\sqrt{a}$. При $a=0$ уравнение $x^2=0$ имеет корень $x=0$, т. е. $\sqrt{0}=0$.

Дадим строгое определение квадратного корня.

Квадратным корнем из неотрицательного числа *a* называют такое неотрицательное число *b*, квадрат которого равен *a*. Это число b обозначают символом $\sqrt{a}$. При этом число a называют **подкоренным числом.**

Итак, для неотрицательного числа a квадратный корень $\sqrt{a}$ имеет свойства:

1) $\sqrt{a}\geq 0$; 2) $(\sqrt{a})^2=a$.

Если $a<0$, то уравнение $x^2=a$ не имеет корней и выражение $\sqrt{a}$ не имеет смысла.

Нахождение квадратного корня из неотрицательного числа называют **извлечением квадратного корня.**

Эта операция является обратной по отношению к возведению в квадрат (см. таблицу).

Возведение в квадрат	Извлечение квадратного корня
$3^2=9$	$\sqrt{9}=3$
$\left(\frac{8}{11}\right)^2=\frac{64}{121}$	$\sqrt{\frac{64}{121}}=\frac{8}{11}$
$0{,}2^2=0{,}04$	$\sqrt{0{,}04}=0{,}2$

Разберемся с понятием квадратного корня.

Пример 3

Вычислим: а) $\sqrt{36}$; б) $\sqrt{0{,}16}$; в) $\sqrt{\frac{16}{25}}$; г) $\sqrt{0}$; д) $\sqrt{-9}$; е) $\sqrt{2209}$; ж) $\sqrt{5}$.

а) $\sqrt{36}=6$, т. к. $6>0$ и $6^2=36$;

б) $\sqrt{0{,}16}=0{,}4$, т. к. $0{,}4>0$ и $0{,}4^2=0{,}16$;

в) $\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$, т. к. $\frac{4}{5}>0$ и $\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$;

г) $\sqrt{0}=0$, т. к. $0\geq 0$ и $0^2=0$;

д) $\sqrt{-9}$ не имеет смысла, т. к. $-9<0$;

е) Очевидно, что $1600<2209<2500$ и $\sqrt{1600}<\sqrt{2209}<\sqrt{2500}$, т. е. $40<\sqrt{2209}<50$. Если число оканчивается на 3 или 7, то его квадрат оканчивается на 9. Поэтому проверим числа 43 и 47. Найдем квадраты этих чисел: 43^2 = 1849 и 47^2 = 2209. Таким образом, $\sqrt{2209}=47$;

ж) Очевидно, что $2<\sqrt{5}<3$. Аналогично примеру 2 можно показать, что число $\sqrt{5}$ – иррациональное. Поэтому мы можем только оценить его. Так как $2{,}2^2$ = 4,84 и $2{,}3^2$ = 5,29, то $2{,}2<\sqrt{5}<2{,}3$. Можем повысить точность оценки. Так как $2{,}23^2$ = 4,9729 и $2{,}24^2$ = 5,0176, то $2{,}23<\sqrt{5}<2{,}24$. Таким образом, $\sqrt{5}\approx 2{,}23$ или $\sqrt{5}\approx 2{,}24$.

К иррациональным числам приводят и многие геометрические задачи.

Пример 4

Катет равнобедренного прямоугольного треугольника равен 1 см. Найдем гипотенузу треугольника.

Воспользуемся знаменитой **теоремой Пифагора**: в прямоугольном треугольнике сумма квадратов длин катетов a и b равна квадрату длины его гипотенузы c, т. е. $a^2+b^2=c^2$. Из этого равенства найдем $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ (см).

Аналогично понятию квадратного корня вводится и понятие кубического корня: **кубическим корнем из неотрицательного числа *a* называют такое неотрицательное число *b*, куб которого равен *a*.**

Другими словами, равенство $\sqrt[3]{a}=b$ означает, что $b^3=a$. Например, $\sqrt[3]{8}=2$, т. к. $2^3=8$; $\sqrt[3]{0{,}001}=0{,}1$, т. к. $0{,}1^3=0{,}001$; $\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}}=\dfrac{2}{3}$, т. к. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{8}{27}$.

Вообще говоря, в математике вводится и понятие корня n-й степени ($n=2, 3, 4, \ldots$) из неотрицательного числа a: **корнем *n*-й степени из неотрицательного числа *a* называют такое неотрицательное число *b*, *n*-я степень которого равна *a***, т. е.

$\sqrt[n]{a}=b$, если $b^n=a$. Например $\sqrt[4]{16}=2$, т. к. $2^4=16$; $\sqrt[5]{243}=3$, т. к. $3^5=243$.

IV. Контрольные вопросы

1. Дайте определение квадратного корня из неотрицательного числа a.
2. Напишите корни квадратного уравнения $x^2=a$ (где $a\geq 0$).
3. Какую операцию называют извлечением квадратного корня?
4. Дайте определение корня n-й степени из неотрицательного числа a.

V. Задание на уроке

№ 10.1; 10.3; 10.7; 10.8 (а, г); 10.13; 10.17 (а, б); 10.20 (в, г); 10.23 (а, б); 10.24; 10.28 (б); 10.30 (а, в); 10.38 (а, г); 10.41 (а, б).

VI. Задание на дом

№ 10.2; 10.5; 10.8 (б, в); 10.10; 10.15; 10.17 (в, г); 10.20 (а, б); 10.23 (в, г); 10.25; 10.28 (г); 10.30 (б, г); 10.38 (б, в); 10.41 (в, г).

VII. Подведение итогов урока

§ 11. Иррациональные числа

Урок 25. Понятие иррационального числа

Цель: расширить понятие числа и дать представление об иррациональных числах.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Вычислите:

а) $\sqrt{225}$; б) $\sqrt{0,04}$;

в) $\sqrt{1\frac{11}{25}}$; г) $\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right)^2$.

2. Решите уравнение:

а) $3x^2 - 18 = 0$; б) $\sqrt{5x-2} = 1$.

Вариант 2

1. Вычислите:

а) $\sqrt{256}$; б) $\sqrt{0,09}$;

в) $\sqrt{2\frac{7}{9}}$; г) $\left(\sqrt{\frac{5}{8}}\right)^2$.

2. Решите уравнение:

а) $4x^2 - 32 = 0$; б) $\sqrt{7x-3} = 1$.

III. Изучение нового материала

В предыдущем параграфе при решении квадратных уравнений мы столкнулись с тем, что существуют числа, которые не являются рациональными. Такие числа называют **иррациональными**. Известно, что любое рациональное число можно записать в виде бесконечной десятичной периодической дроби. Разумно предположить, что для иррациональных чисел этого сделать нельзя. Другими словами, **иррациональное число выражается бесконечной десятичной непериодической дробью.**

Пример 1

Рассмотрим десятичную бесконечную дробь 0,1223333… . В этом числе после запятой выписано один раз число 1, затем два раза – число 2, потом три раза – число 3 и т. д. Очевидно, такая дробь бесконечная и непериодическая. Поэтому такое число является иррациональным.

Приведем и другие примеры иррациональных чисел.

Пример 2

а) В предыдущем параграфе уже рассматривались такие числа $\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}$. Вообще говоря, если натуральное число n не является точным квадратом (т. е. $n \neq k^2$, где $k \in N$), то $\sqrt{n}$ – иррациональное число. Например, числа: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \ldots$ – иррациональные.

б) Гипотенузы прямоугольных треугольников с катетами 1 и 1 см, 1 и 2 см, 1 и 3 см, 2 и 3 см и т. д. выражаются иррациональными числами (соответственно, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$ см).

в) В любой окружности отношение ее длины к диаметру является постоянным числом. Его обозначают буквой π (греческая буква «пи»). Такое число иррациональное и $\pi \approx 3{,}1416\ldots$.

Заметим, что **результатом операций с рациональными числами также будет рациональное число**. В случае **иррациональных чисел** никакой **определенности нет**.

Пример 3

а) произведение двух иррациональных чисел $\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}=(\sqrt{7})^2=7$ – число рациональное.

б) произведение двух иррациональных чисел $\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{21}$ (такое свойство будет рассмотрено в § 14) – число иррациональное.

Пример 4

Рассмотрим сумму рационального числа 4 и иррационального числа $\sqrt{5}$ и обозначим ее r, т. е. $r=4+\sqrt{5}$. Докажем, что число r – иррациональное.

Используем метод доказательства от противного.

Предположим, что $r=4+\sqrt{5}$ – число рациональное. Выразим из этого равенства $\sqrt{5}=r-4$. Так как (по предположению) r – число рациональное, то разность $r-4$ также число рациональное.

Тогда получаем, что $\sqrt{5}$ – рациональное число, а это неверно. Имеем противоречие. Следовательно, число $4+\sqrt{5}$ – иррациональное. Аналогично можно доказать, что число $4-\sqrt{5}$ также иррациональное.

Сумма этих чисел $(4+\sqrt{5})+(4-\sqrt{5})=4+\sqrt{5}+4-\sqrt{5}=8$ – число рациональное. Разность чисел $(4+\sqrt{5})-(4-\sqrt{5})=4+\sqrt{5}-4+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$ – число иррациональное. Произведение чисел $(4+\sqrt{5})(4-\sqrt{5})=$ $=4^2-(\sqrt{5})^2=16-5=11$ – число рациональное.

В заключение еще раз подчеркнем, что **иррациональное число нельзя представить в виде $\frac{m}{n}$** (в таком виде могут быть записаны только рациональные числа).

IV. Задание на уроке

№ 11.1 (а, б); 11.2 (в, г); 11.3; 11.5 (а, г); 11.6 (в, г); 11.8; 11.11; 11.14; 11.15 (а, б); 11.16.

V. Задание на дом

№ 11.1 (в, г); 11.2 (а, б); 11.4; 11.5 (б, в); 11.6 (а, б); 11.9; 11.13; 11.15 (в, г); 11.17.

VI. Подведение итогов урока

§ 12. Множество действительных чисел

Урок 26. Действительные числа

Цель: обсудить множество действительных чисел и действия с ними.

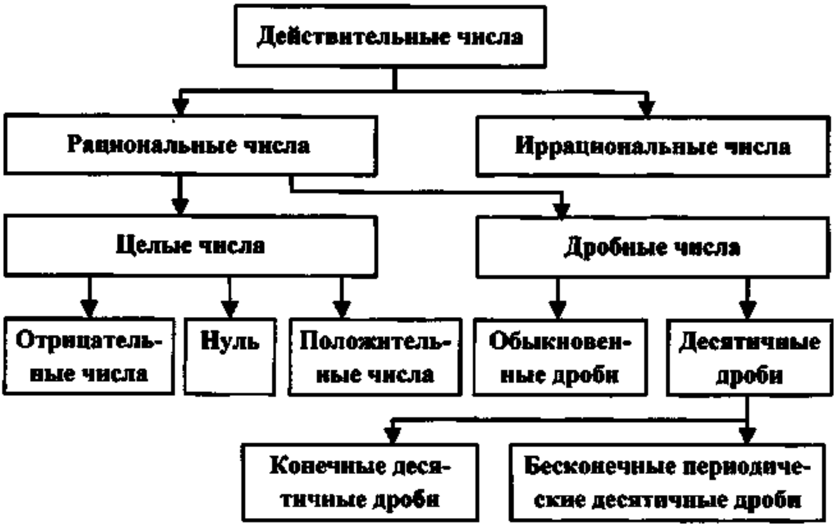
Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

Рациональные и иррациональные числа образуют множество действительных чисел. Такое множество обозначают буквой R, используют также запись $(-\infty; +\infty)$ или $(-\infty; \infty)$.

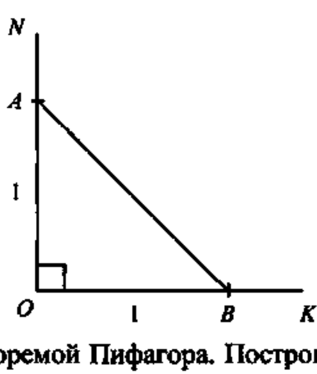
Множество действительных чисел – это множество бесконечных десятичных дробей. При этом бесконечные десятичные периодические дроби – рациональные числа, а бесконечные десятичные непериодические дроби – иррациональные числа. **Структура** множества действительных чисел представлена на схеме.



Действительные числа принято и удобно изображать на числовой прямой Ox. Тогда каждому действительному числу на оси Ox отвечает определенная точка. Также справедливо и обратное утверждение: любой точке на оси Ox отвечает определенное число.

Пример 1

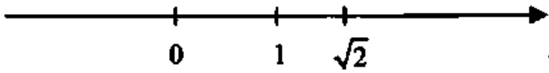
Отложим на числовой оси число $\sqrt{2}$.



Воспользуемся теоремой Пифагора. Построим прямой угол KON и на его сторонах отметим единичные отрезки OA и OB. Тогда по теореме Пифагора длина отрезка AB равна:

$$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

Теперь возьмем числовую ось и с помощью циркуля перенесем отрезок AB, отложив его справа от начала отсчета.



Разумеется, ранее введенные правила сложения и умножения сначала целых, а потом и рациональных чисел, справедливы и для действительных чисел:

$a+b=b+a$; $ab=ba$;

$a+(b+c)=(a+b)+c$ и т. д.

Также для действительных чисел справедливы и формулы сокращенного умножения:

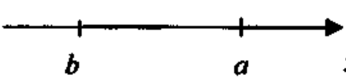
$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$;

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ и т. д.

Часто возникает необходимость сравнения чисел.

Действительное число a больше (меньше) действительного числа b, если их разность $a-b$ – положительное (отрицательное) число. Соответственно записывают: $a>b$ ($a<b$). **Числа a и b равны, если их разность равна нулю**, т. е. $a=b$. Из двух действительных чисел **больше** то число, которое располагается **правее** на числовой оси.



$a>b$

$a<b$.

Пример 2

Сравним числа: а) $\dfrac{31}{6}$ и 5; б) $\dfrac{11}{12}$ и $\dfrac{12}{13}$; в) $3+\sqrt{2}$ и 4,5; г) $-\sqrt{5}$ и $-2{,}5$.

Рассмотрим разность сравниваемых чисел. В случае иррациональных чисел будем использовать их приближенные значения. Получаем:

а) $\dfrac{31}{6}-5=\dfrac{31-5\cdot 6}{6}=\dfrac{1}{6}>0$, т. к. разность положительна, то первое число больше: $\dfrac{31}{6}>5$;

б) $\frac{11}{12} - \frac{12}{13} = \frac{11 \cdot 13 - 12 \cdot 12}{12 \cdot 13} = \frac{143 - 144}{12 \cdot 13} = -\frac{1}{12 \cdot 13}$, т. к. разность отрицательна, то первое число меньше: $\frac{11}{12} < \frac{12}{13}$;

в) $(3+\sqrt{2}) - 4,5 = \sqrt{2} - 1,5 \approx 1,41 - 1,5 = -0,09$, т. к. разность отрицательна, то первое число меньше: $3+\sqrt{2} < 4,5$;

г) $-\sqrt{5} - (-2,5) = 2,5 - \sqrt{5} \approx 2,5 - 2,23 \approx 0,27$, т. к. разность положительна, то первое число больше: $-\sqrt{5} > -2,5$.

Пример 3

Расположим в порядке убывания числа: $-\sqrt{2}$; 2,5; $\frac{\pi}{2}$; 1,5; $\sqrt{15}$; 4; π; $-\sqrt{3}$.

Оценим иррациональные числа: $\sqrt{2} \approx 1,41$; $\frac{\pi}{2} \approx \frac{3,14}{2} = 1,57$; $\sqrt{15} \approx 3,87$; $\pi \approx 3,14$ и $\sqrt{3} \approx 1,73$. Теперь легко расположить эти числа в порядке убывания: 4; $\sqrt{15}$; π; 2,5; $\frac{\pi}{2}$; 1,5; $-\sqrt{2}$; $-\sqrt{3}$.

III. Контрольные вопросы

1. Какие числа образуют множество действительных чисел? Как обозначают множество действительных чисел?
2. Структура действительных чисел (схема).
3. Какие действительные числа можно и какие нельзя представить в виде отношения $\frac{m}{n}$ (где m – целое число, n – натуральное число)?
4. Изображение действительных чисел на числовой прямой.
5. Сравнение действительных чисел.

IV. Задание на уроке

№ 12.1; 12.3; 12.4 (а, б); 12.5 (б, в); 12.6 (а, б); 12.7 (в, г); 12.8; 12.10; 12.14; 12.16; 12.19.

V. Задание на дом

№ 12.2; 12.4 (в, г); 12.5 (а, г); 12.6 (в, г); 12.7 (а, б); 12.9; 12.11; 12.15; 12.17; 12.20; 12.22.

VI. Подведение итогов урока

§ 13. Функция $y=\sqrt{x}$, ее свойства и график

Уроки 27–28. Свойства функции $y=\sqrt{x}$

Цель: рассмотреть зависимость $y=\sqrt{x}$ и ее свойства.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Расположите в порядке возрастания числа: 2π; 6,3; $\sqrt{17}$; $-\sqrt{5}$; 3,2; $-\sqrt{7}$; π.

2. Сравните числа x и y, если известно, что $x=2+3a^2$ и $y=3+4a^2$ (где a – действительное число).

Вариант 2

1. Расположите в порядке возрастания числа: π; $\sqrt{7}$; 3,2; -2π; $\sqrt{5}$; $-6{,}1$; $-\sqrt{8}$.

2. Сравните числа x и y, если известно, что $x=5+7a^2$ и $y=4+5a^2$ (где a – действительное число).

III. Изучение нового материала

Рассмотрение функции $y=\sqrt{x}$ начнем со следующего примера.

Пример 1

Пусть длина стороны квадрата равна a (см), а его площадь S (см^2). Величина S и a связаны соотношением $S=a^2$, где $a \geq 0$. Это равенство означает, что каждому значению стороны квадрата a соответствует единственное значение его площади S. Из равенства $S=a^2$ найдем $a=\sqrt{S}$. Такое выражение означает, что для каждого значения площади квадрата S можно указать единственное значение его стороны a. Формулами $S=a^2$ (где $a \geq 0$) и $a=\sqrt{S}$ задаются функциональные зависимости между одними и теми же переменными a и S. Однако в первом случае независимой переменной (аргументом) является сторона квадрата a, зависимой переменной (значением функции) – его площадь S.

Во втором случае, наоборот, независимой переменной (аргументом) является площадь квадрата S, зависимой переменной (значением функции) – его сторона a.

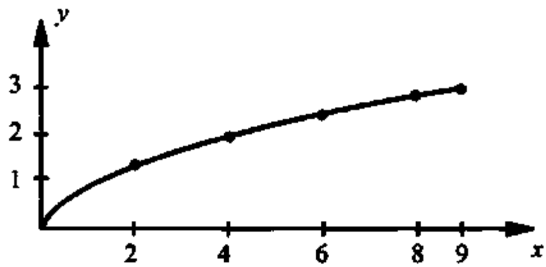
Заметим, что функции $S = a^2$ (где $a \geq 0$) и $a = \sqrt{S}$ являются **взаимнообратными.**

Пример 2

Если в предыдущем примере в каждом случае обозначить, как принято, независимую переменную буквой x, а зависимую переменную буквой y, то получим взаимнообратные функции $y = x^2$ (где $x \geq 0$) и $y = \sqrt{x}$. Сравним свойства и графики этих функций.

Сначала составим таблицу значений функции $y = \sqrt{x}$ и построим ее график.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	1	1,4	1,7	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3



Приведем **основные свойства функции** $y = \sqrt{x}$:

1. Область определения функции – значения $x \geq 0$.

2. Область изменения (значений) функции – значения $y \geq 0$.

3. График функции пересекает оси координат в начале системы координат.

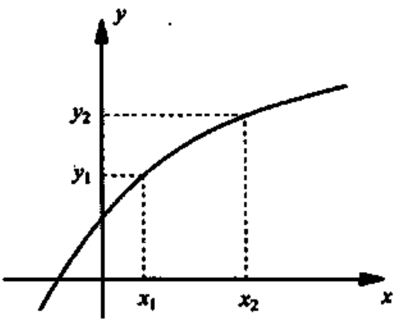
4. Значения функции $y \geq 0$ при $x \geq 0$ и график расположен в первой координатной четверти.

5. Функция монотонно возрастает.

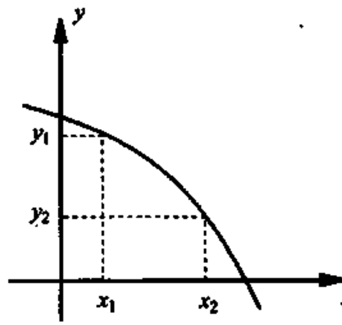
Дадим **определение монотонной функции.** Пусть числа x_1 и x_2 принадлежат области определения функции и значения функции в этих точках y_1 и y_2 соответственно. Пусть (для определенности) $x_2 > x_1$. Если при этом для всех значений x_1 и x_2:

1) $y_2 > y_1$ (т. е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции), то функция возрастает (график идет вверх).

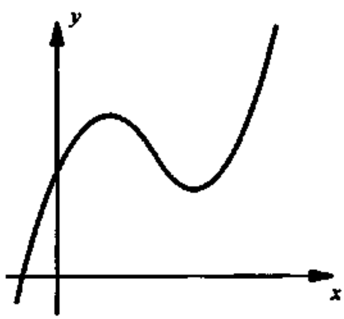
2) $y_2 < y_1$ (т. е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции), то функция убывает (график идет вниз).



Функция возрастает
($y_2 > y_1$)



Функция убывает
($y_2 < y_1$)



Немонотонная функция

Функция $y = x^2$, ее свойства и график были изучены в 7 классе. Рассмотрим только $x \geq 0$. В этой области значений x напомним **основные свойства** этой функции:

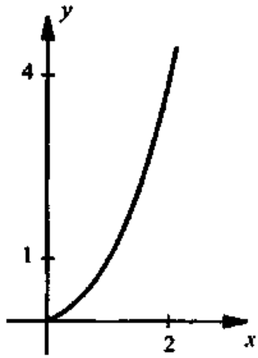
1. Область определения функции – значения $x \geq 0$.

2. Область изменения (значений) функции – значения $y \geq 0$.

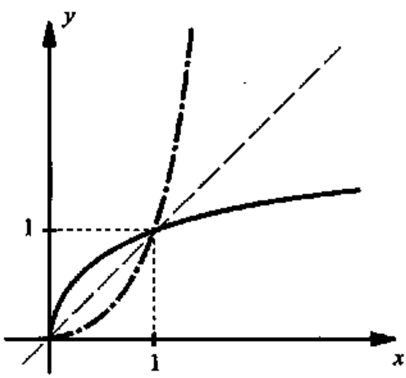
3. График функции пересекает оси координат в начале системы координат.

4. Значения функции $y \geq 0$ и $x \geq 0$ и график расположен в первой координатной четверти.

5. Функция монотонно возрастает.



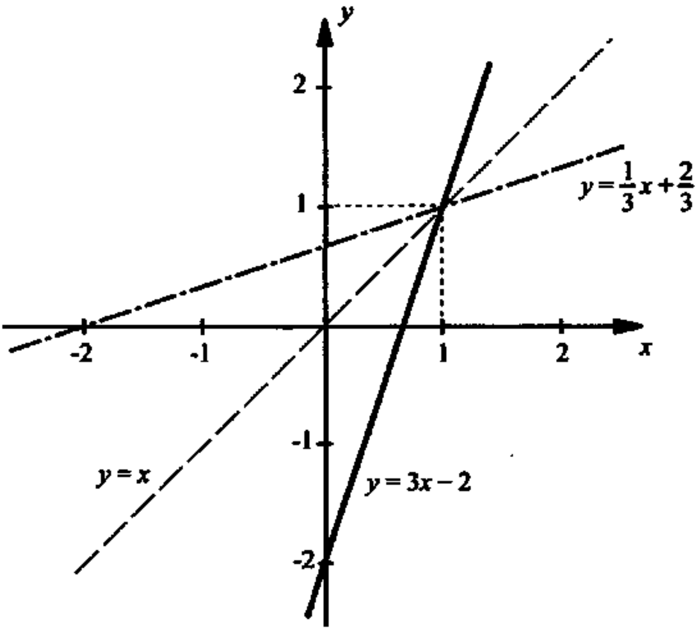
Заметим, что **графики функций $y=\sqrt{x}$ и $y=x^2$** (где $x \geq 0$) **симметричны относительной прямой $y = x$** (биссектрисы первого и третьего координатных углов). Доказательства этого факта, а также свойства взаимнообратных функций мы в 8 классе приводить не будем.



Пример 3

Для линейной функции $y = 3x - 2$ найти обратную. Построить графики этих функций и убедиться, что они симметричны относительно прямой $y = x$.

Переменные y и x связаны соотношением $y = 3x - 2$, что позволяет для любого значения x вычислить соответствующее значение y. Теперь из того же соотношения $y = 3x - 2$ выразим x: $3x = y + 2$ и $x=\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}$. Теперь можно по любому значению y найти соответствующее ему значение x, т. е. x является функцией y. Так как принято независимую переменную обозначать буквой x, а зависимую – буквой y, то в выражении $x=\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}$ поменяем x на y, а y – на x. Получаем функцию $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$. Эта функция является обратной для данной функции $y = 3x - 2$.



Построим графики линейных функций $y = 3x - 2$ и $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$. Видно, что эти графики симметричны относительной прямой $y = x$. На основании рисунка приведем еще некоторые **свойства взаимнообратных функций:**

1. Монотонность таких функций одинакова. Из рисунка видно, что обе функции возрастают.

2. Если график данной функции пересекает ось абсцисс в точке $x = a$ и ось ординат – в точке $y = b$, то график обратной функции, наоборот, пересекает ось абсцисс в точке $x = b$ и ось ординат – в точке $y = a$. Из рисунка видно, что точки пересечения графика функции $y = 3x - 2$ с осями координат $x=\frac{2}{3}$ и $y = -2$. Точки пере-

сечения графика обратной функции $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ с осями координат, наоборот, $x=-2$ и $y=\frac{2}{3}$.

Еще раз вернемся к функции $y=\sqrt{x}$.

Пример 4

Найдем наименьшее и наибольшее значение функции $y=\sqrt{x}$ на отрезке: а) [1; 9]; б) [4; 7].

Известно, что функция $y=\sqrt{x}$ является возрастающей. Поэтому наименьшее значение функции достигается на левой границе отрезка, наибольшее – на правой:

а) $y_{наим}=\sqrt{1}=1$ (достигается при $x=1$) и $y_{наиб}=\sqrt{9}=3$ (достигается при $x=9$);

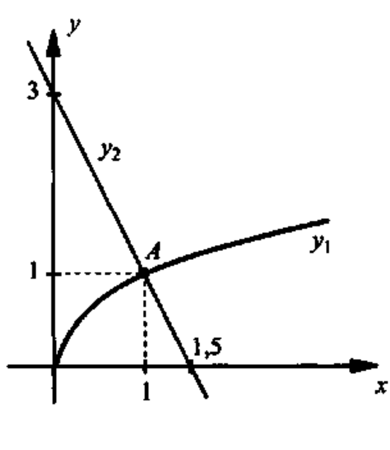
б) $y_{наим}=\sqrt{4}=2$ (достигается при $x=4$) и $y_{наиб}=\sqrt{7}\approx 2,65$ (достигается при $x=7$).

Значение графика $y=\sqrt{x}$ позволяет решать простейшие иррациональные уравнения.

Пример 5

Решим уравнение $2x+\sqrt{x}-3=0$.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{x}=3-2x$. В одной и той же системе координат построим графики функций $y_1=\sqrt{x}$ и $y_2=3-2x$. Видно, что графики пересекаются в одной точке $A(1;\ 1)$. Поэтому данное уравнение имеет единственное решение $x=1$ – корень уравнения.



Однако, несмотря на свою наглядность, графический способ решения уравнений имеет и свои недостатки: возможность ошибки при построении графиков соответствующих функций, недостаточная точность нахождения корня (например, корни $x = 1$ и $x = 0{,}9$ различить невозможно) и т. д. Поэтому для данного уравнения докажем, что корень $x = 1$ – единственный. Для этого используем монотонность функций, входящих в уравнение.

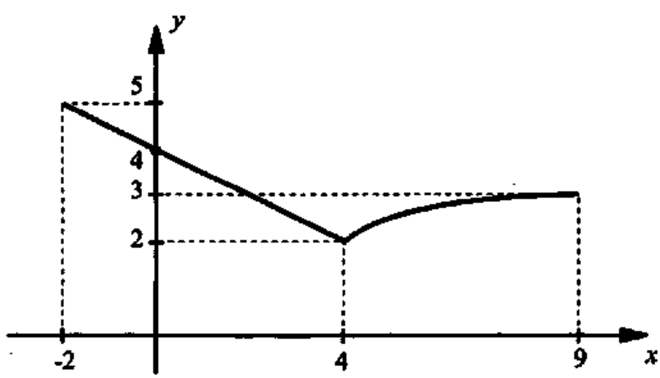
Функция $y_1 = \sqrt{x}$ – возрастающая, а функция $y_2 = 3 - 2x$ – убывающая. Поэтому при $x < 1$ значения $y_1(x) < y_1(1) = 1$, а $y_2(x) > y_2(1) = 1$. Наоборот, при $x > 1$ значения $y_1(x) < y_1(1) = 1$, а $y_2(x) > y_2(1) = 1$. Следовательно, в точке, отличной от точки (1; 1), графики функций y_1 и y_2 пересекаться не могут.

Пример 6

Построим график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} 4 - \frac{1}{2}x, \text{ если } -2 \le x \le 4, \\ \sqrt{x}, \text{ если } 4 < x \le 9 \end{cases}$$ и опишем ее свойства.

Данная функция является кусочной, т. к. задается разными формулами на разных промежутках области определения. Сначала построим график линейной функции $y = 4 - \frac{1}{2}x$ (прямая линия) и выделим его часть на отрезке [−2; 4]. Затем построим график функции $y = \sqrt{x}$ (ветвь параболы) и выделим его часть на полуинтервале (4; 9].



Опишем **свойства** данной функции:

1. **Область определения** функции – отрезок [−2; 9].

2. Во всей области определения **значения функции** $y > 0$.

3. Функция **убывает** на отрезке $[-2; 4]$ и **возрастает** на отрезке $[4; 9]$.

4. **Наименьшее значение** функции $y_{наим} = 2$ достигается при $x = 4$. **Наибольшее значение** $y_{наиб} = 5$ достигается при $x = -2$.

5. **Функция непрерывна** в заданной области определения.

6. **Область значений** функции – отрезок $[2; 5]$.

По аналогичному плану можно описывать свойства и других функций.

IV. Контрольные вопросы

1. Перечислите основные свойства функции $y=\sqrt{x}$ и постройте ее график.

2. Перечислите основные свойства функции $y = x^2$ (где $x \ge 0$) и постройте ее график.

3. Приведите основные свойства взаимнообратных функций. Что можно сказать про графики таких функций?

V. Задание на уроке

№ 13.1; 13.5 (а, б); 13.6 (в, г); 13.9 (а, г); 13.11 (б, в); 13.14 (а); 13.15 (б); 13.17; 13.20 (а, б); 13.22 (в, г); 13.30 (а); 13.31 (б); 13.32 (б).

VI. Задание на дом

№ 13.2; 13.5 (в, г); 13.6 (а, б); 13.9 (б, в); 13.11 (а, г); 13.14 (б); 13.15 (а); 13.18; 13.20 (в, г); 13.22 (а, б); 13.30 (б); 13.31 (а); 13.32 (а).

VII. Творческие задания

1. Для данной функции найдите обратную. Постройте графики этих функций.

а) $y = 2x - 1$; б) $y = 2 - 3x$; в) $y=\frac{1}{2}x+1$; г) $y=-\frac{1}{3}x+2$.

Ответы: а) $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$; б) $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$; в) $y = 2x - 2$; г) $y = -3x + 6$.

2. При каких значениях a и b функция $y = ax + b$ совпадает с обратной функцией?

Ответ: $a = 1$, $b = 0$ и $a = -1$, b – любое число.

Решение. Для функции $y = ax + b$ выразим переменную x через y. Получаем: $y - b = ax$ и $x=\frac{y-b}{a}$ (если $a \ne 0$) или $x=\frac{1}{a}y-\frac{b}{a}$. Обозначим независимую переменную буквой x, зависимую – буквой y.

Имеем функцию $y=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$. Эта функция обратная для данной функции $y=ax+b$. Если эти функции совпадают, то при всех x выполняется равенство $ax+b=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$. Это возможно при выполнении двух условий $\begin{cases} a=\frac{1}{a}, \\ b=-\frac{b}{a}, \end{cases}$ или $\begin{cases} a^2=1, \\ ab=-b, \end{cases}$ или $\begin{cases} a^2=1, \\ b(a+1)=0. \end{cases}$

Решения первого уравнения $a=\pm1$. Если $a=1$, то при подстановке этого значения во второе уравнение получаем $b\cdot2=0$, откуда $b=0$. В этом случае данная и обратная функции имеют вид $y=x$. График такой функции совпадает с осью симметрии $y=x$. Если $a=-1$, то при подстановке этого значения во второе уравнение получаем $b\cdot0=0$, откуда b – любое число. В этом случае данная и обратная функции имеют вид $y=-x+b$. График такой функции перпендикулярен оси симметрии $y=x$.

VIII. Подведение итогов урока

§ 14. Свойства квадратных корней

Уроки 29–30. Квадратный корень из произведения и дроби

Цель: рассмотреть свойства квадратного корня из произведения и дроби.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Перечислите основные свойства функции $y=\sqrt{x}$ и постройте ее график.

2. Сравните числа:

а) $\sqrt{0,83}$ и $\sqrt{1,37}$;

б) 2,5 и $\sqrt{6,08}$.

3. Расположите числа в порядке возрастания: 7; $\sqrt{48}$; 6,5; $\sqrt{51}$; $\sqrt{37}$.

4. В какой точке график функции $y=\sqrt{x}$ пересекает прямая $y=2x-1$ (если они пересекаются)?

Вариант 2

1. Перечислите основные свойства функции $y=x^2$ и постройте ее график.

2. Сравните числа:

а) $\sqrt{0,91}$ и $\sqrt{1,12}$;

б) 1,7 и $\sqrt{3,02}$.

3. Расположите числа в порядке убывания: 8; $\sqrt{50}$; 7,5; $\sqrt{65}$; $\sqrt{48}$.

4. В какой точке график функции $y=\sqrt{x}$ пересекает прямая $y=3x-2$ (если они пересекаются)?

III. Изучение нового материала

До сих пор изучались свойства пяти арифметических операций: сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень. Например: $ab=ba$, $(ab)^n=a^n\cdot b^n$ и т. д.

В предыдущих параграфах было введено понятие квадратного корня (а вообще, корня n-й степени). Тем самым была введена новая операция – **извлечение** квадратного **корня** (вообще говоря, извлечение корня n-й степени). Разумеется, необходимо установить свойства такой операции.

Теорема 1. Квадратный корень из произведения двух неотрицательных чисел равен произведению корней из этих чисел, т. е. $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ (где $a\ge 0$ и $b\ge 0$).

Докажем это утверждение. Для этого покажем, что выполняются два условия: 1) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ge 0$ и 2) $(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2=ab$.

Так как $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то каждое из выражений $\sqrt{ab}$ и $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ имеет смысл. По определению арифметического квадратного корня выражения $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ принимают только неотрицательные значения. Поэтому произведение $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ неотрицательно.

Используя свойство степени произведения, имеем: $(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2 =$ $= (\sqrt{a})^2\cdot(\sqrt{b})^2 = a\cdot b = ab$. Таким образом, мы показали, что выполняются условия 1) и 2). Значит, при любых неотрицательных значениях a и b по определению арифметического квадратного корня выполняется равенство $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$.

Пример 1

Найдем значения выражения:

а) $\sqrt{121\cdot 0{,}16}$;

б) $\sqrt{72\cdot 128}$;

в) $\sqrt{26{,}5^2 - 22{,}5^2}$.

а) Используем теорему о корне из произведения: $\sqrt{121\cdot 0{,}16} =$ $= \sqrt{121}\cdot\sqrt{0{,}16} = \sqrt{11^2}\cdot\sqrt{0{,}4^2} = 11\cdot 0{,}4 = 4{,}4.$

б) Представим подкоренное выражение в виде произведения множителей, каждый из которых является квадратом целого числа. Применим также теорему о корне из произведения. Имеем: $\sqrt{72\cdot 128} = \sqrt{72\cdot(2\cdot 64)} = \sqrt{(72\cdot 2)\cdot 64} = \sqrt{144\cdot 64} = \sqrt{144}\cdot\sqrt{64} =$ $= \sqrt{12^2}\cdot\sqrt{8^2} = 12\cdot 8 = 96.$

в) В подкоренном выражении разложим разность квадратов чисел на множители и используем теорему о корне из произведения. Получаем: $\sqrt{26{,}5^2 - 22{,}5^2} = \sqrt{(26{,}5 - 22{,}5)(26{,}5 + 22{,}5)} = \sqrt{4\cdot 49} =$ $= \sqrt{4}\cdot\sqrt{49} = 2\cdot 7 = 14.$

Доказанная теорема справедлива и в случае, когда число множителей в подкоренном выражении больше двух. Докажем это утверждение, например, для трех множителей $a \geq 0$, $b \geq 0$ и $c \geq 0$. Получаем: $\sqrt{abc} = \sqrt{(ab)\cdot c} = \sqrt{ab}\cdot\sqrt{c} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}$.

Пример 2

Еще раз вернемся к примеру 1б) и получим: $\sqrt{72\cdot 128} =$ $= \sqrt{(36\cdot 2)\cdot(2\cdot 64)} = \sqrt{36\cdot 2\cdot 2\cdot 64} = \sqrt{36\cdot 4\cdot 64} = \sqrt{36}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{64} =$ $= 6\cdot 2\cdot 8 = 96.$

Рассмотрим теперь арифметический квадратный корень из дроби.

Теорема 2. Квадратный корень из дроби, числитель которой неотрицателен, а знаменатель положителен, равен отношению корня из числителя к корню из знаменателя, т. е. $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (где $a\geq 0$ и $b>0$).

Докажем это утверждение. Для этого покажем, что выполняются два условия: 1) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\geq 0$ и 2) $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{a}{b}$.

Так как $a\geq 0$ и $b>0$, то каждое из выражений $\sqrt{\frac{a}{b}}$ и $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ имеет смысл. По определению арифметического квадратного корня выражение $\sqrt{a}$ принимает только неотрицательные значения, а выражение $\sqrt{b}$ – только положительные значения. Поэтому дробь $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ неотрицательна.

Используя свойства степени дроби, имеем: $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}=\frac{a}{b}$.

Таким образом, мы показали, что выполняются условия 1) и 2). Значит, при любых неотрицательных значениях a и положительных значениях b по определению арифметического квадратного корня выполняется равенство $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Пример 3

Найдем значение выражения $\sqrt{\frac{81}{256}}$.

По теореме о корне из дроби имеем: $\sqrt{\frac{81}{256}}=\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{256}}=\frac{9}{16}$.

Разумеется, можно сочетать теоремы о корне из произведения и корне из дроби.

Пример 4

Найдем значение выражения $\sqrt{\frac{81\cdot 64}{25\cdot 49}}$.

Используя указанные теоремы, получим: $\sqrt{\frac{81\cdot 64}{25\cdot 49}}=\frac{\sqrt{81\cdot 64}}{\sqrt{25\cdot 49}}=$

$=\frac{\sqrt{81}\cdot\sqrt{64}}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{49}}=\frac{9\cdot 8}{5\cdot 7}=\frac{72}{35}=2\frac{2}{35}.$

Рассмотренные теоремы справедливы для любых выражений (числовых и алгебраических).

Пример 5

Упростим выражение $\sqrt{\frac{a^4}{b^8\cdot c^{12}}}$.

Используя теоремы о корне из произведения и корне из дроби, получим: $\sqrt{\frac{a^4}{b^8\cdot c^{12}}}=\frac{\sqrt{a^4}}{\sqrt{b^8\cdot c^{12}}}=\frac{\sqrt{a^4}}{\sqrt{b^8}\cdot\sqrt{c^{12}}}=\frac{\sqrt{(a^2)^2}}{\sqrt{(b^4)^2}\cdot\sqrt{(c^6)^2}}=\frac{a^2}{b^4c^6}.$

Тождества $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ и $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ также удобно использовать, поменяв их части местами: $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ и $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Пример 6

Найдем произведение $\sqrt{6}\cdot\sqrt{24}$.

Получаем: $\sqrt{6}\cdot\sqrt{24}=\sqrt{6\cdot 24}=\sqrt{144}=\sqrt{12^2}=12.$

Пример 7

Найдем частное $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}$.

Имеем: $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{54}{6}}=\sqrt{9}=3.$

Пример 8

Найдем значение выражения $\frac{\sqrt{18}\cdot\sqrt{108}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}}$.

Используя рассмотренные тождества, получим: $\frac{\sqrt{18}\cdot\sqrt{108}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}}=$

$=\frac{\sqrt{18\cdot 108}}{\sqrt{6\cdot 3\cdot 12}}=\sqrt{\frac{18\cdot 108}{6\cdot 3\cdot 12}}=\sqrt{\frac{108}{12}}=\sqrt{9}=3.$

Пример 9

Упростим выражение $\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a^7}\cdot\sqrt{a^3}}{\sqrt{a^5}}$.

По смыслу задачи переменная $a > 0$. Получаем: $\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a^7}\cdot\sqrt{a^3}}{\sqrt{a^5}}=$

$$=\frac{\sqrt{a\cdot a^7\cdot a^3}}{\sqrt{a^5}}=\frac{\sqrt{a^{11}}}{\sqrt{a^5}}=\sqrt{\frac{a^{11}}{a^5}}=\sqrt{a^6}=\sqrt{(a^3)^2}=a^3.$$

IV. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте и запишите теорему о квадратном корне из произведения чисел.
2. Сформулируйте и запишите теорему о квадратном корне из дроби.

V. Задание на уроке

№ 14.2 (а, в); 14.3 (а, б); 14.5 (в, г); 14.7 (б); 14.10 (г); 14.12 (а, б); 14.16 (а, г); 14.19 (б); 14.22 (а, б); 14.24 (в, г); 14.25 (а, г); 14.29 (в); 14.30 (г).

VI. Задание на дом

№ 14.2 (б, г); 14.3 (в, г); 14.5 (а, б); 14.7 (г); 14.10 (в); 14.12 (в, г); 14.16 (б, в); 14.19 (г); 14.22 (в, г); 14.24 (а, б); 14.25 б, в); 14.29 (г); 14.30 (б).

VII. Подведение итогов урока

§ 15. Преобразование выражений, содержащих операцию извлечения квадратного корня

Уроки 31–32. Преобразования иррациональных выражений

Цель: обработать навыки преобразования иррациональных выражений.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Сформулируйте и запишите теорему о квадратном корне из произведения чисел.

2. Вычислите значение выражения:

а) $\sqrt{\frac{9}{16}}+\sqrt{\frac{25}{36}}$; б) $\sqrt{3\frac{13}{36}}$; в) $\sqrt{\frac{1}{17}}\cdot\sqrt{\frac{6}{25}}\cdot\sqrt{\frac{17}{6}}$;

г) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{288}}$; д) $\sqrt{113^2-112^2}$.

Вариант 2

1. Сформулируйте и запишите теорему о квадратном корне из частного.

2. Вычислите значение выражения:

а) $\sqrt{\frac{16}{9}}+\sqrt{\frac{49}{36}}$; б) $\sqrt{2\frac{7}{81}}$; в) $\sqrt{\frac{2}{13}}\cdot\sqrt{\frac{8}{25}}\cdot\sqrt{13}$;

г) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{294}}$; д) $\sqrt{145^2-144^2}$.

III. Изучение нового материала

Нам уже известны свойства извлечения квадратного корня: $(\sqrt{a})^2=a$; $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$; $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$; $\sqrt{a^{2n}}=a^n$ (где $a\geq 0$, $b>0$).

Используем эти свойства для преобразования иррациональных выражений, т. е. выражений, содержащих операцию извлечения корня. В этом параграфе будем считать, что переменные принимают только неотрицательные значения.

Для сравнения числовых выражений, преобразования иррациональных выражений и т. д. необходимы навыки **вынесения множителя из-под знака корня и внесения множителя под знак корня**, основанные на использовании свойств квадратного корня. Рассмотрим эти приемы на примерах.

Пример 1

Сравним значение выражений $\sqrt{75}$ и $6\sqrt{3}$. Это можно сделать двумя способами.

1-й способ (вынесение множителя из-под знака корня). Преобразуем первое иррациональное число $\sqrt{75}$. Представим число 75 в виде произведения двух множителей, один из которых является квадратом натурального числа: $75 = 25 \cdot 3$. Используем теорему о корне из произведения и получим: $\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$. Теперь легко сравнить данные числа. Так как $5\sqrt{3} < 6\sqrt{3}$, то $\sqrt{75} < 6\sqrt{3}$.

При решении **число** $\sqrt{75}$ было **заменено произведением двух множителей** 5 и $\sqrt{3}$, **один из которых – целое число** 5, **а другое – иррациональное число** $\sqrt{3}$. Такое преобразование называют вынесением множителя из-под знака корня.

2-й способ (внесение множителя под знак корня). Теперь преобразуем второе иррациональное число $6\sqrt{3}$, представив его в виде квадратного корня. Для этого число 6 заменим выражением $\sqrt{36}$ и используем теорему о корне из произведения: $6\sqrt{3} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{36 \cdot 3} = \sqrt{108}$. Сравним данные числа. Так как $75 < 108$, то $\sqrt{75} < \sqrt{108}$, или $\sqrt{75} < 6\sqrt{3}$.

При решении **выражение** $6\sqrt{3}$ было **представлено в виде квадратного корня** $\sqrt{108}$. Такое преобразование называют внесением множителя под знак корня.

Эти способы используются и при решении более сложных задач.

Пример 2

Упростим выражение $20\sqrt{2} + 15\sqrt{50} - 30\sqrt{8} - 9\sqrt{32}$.

В данном выражении вынесем множители из-под знаков корня. Для этого подкоренные выражения представим в виде произведения квадратов натуральных чисел и числа 2, т. е. $50 = 25 \cdot 2 = 5^2 \cdot 2$, $8 = 4 \cdot 2 = 2^2 \cdot 2$ и $32 = 16 \cdot 2 = 4^2 \cdot 2$. Тогда данное выражение имеет вид: $20\sqrt{2} + 15\sqrt{50} - 30\sqrt{8} - 9\sqrt{32} = 20\sqrt{2} + 15\sqrt{5^2 \cdot 2} -$

$-30\sqrt{2^2 \cdot 2} - 9\sqrt{4^2 \cdot 2} = 20\sqrt{2} + 15 \cdot 5\sqrt{2} - 30 \cdot 2\sqrt{2} - 9 \cdot 4\sqrt{2} =$

$= 20\sqrt{2} + 75\sqrt{2} - 60\sqrt{2} - 36\sqrt{2} = -\sqrt{2}$.

Было учтено, что все слагаемые являются подобными членами, т. к. содержат выражения $\sqrt{2}$ с разными коэффициентами.

Итак, данное выражение равно иррациональному числу $-\sqrt{2} \approx -1{,}41$.

Пример 3

Докажем, что выражение $A=(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$ равно натуральному числу 2.

В выражении A изменим порядок умножения и внесем величину $4+\sqrt{15}$ под знак корня. Получаем: $A=(\sqrt{10}-\sqrt{6})(4+\sqrt{15})\sqrt{4-\sqrt{15}}=$
$=(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{(4+\sqrt{15})^2(4-\sqrt{15})}=(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{(4+\sqrt{15})(4+\sqrt{15})(4-\sqrt{15})}=$
$=(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{(4+\sqrt{15})(4^2-(\sqrt{15})^2)}=(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{(4+\sqrt{15})(16-15)}=$
$=(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4+\sqrt{15}}.$

Была использована формула разности квадратов. Теперь внесем под знак корня величину $\sqrt{10}-\sqrt{6}$. Имеем: $A=(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4+\sqrt{15}}=$
$=\sqrt{(\sqrt{10}-\sqrt{6})^2(4+\sqrt{15})}=\sqrt{(10-2\sqrt{10\cdot 6}+6)(4+\sqrt{15})}=$
$=\sqrt{(16-2\sqrt{60})(4+\sqrt{15})}=\sqrt{(16-2\sqrt{4\cdot 15})(4+\sqrt{15})}=$
$=\sqrt{(16-4\sqrt{15})(4+\sqrt{15})}=\sqrt{4(4-\sqrt{15})(4+\sqrt{15})}=\sqrt{4(4^2-(\sqrt{15})^2)}=$
$=\sqrt{4(16-15)}=\sqrt{4}=2.$

Были использованы формула квадрата разности и вновь формула разности квадратов. Итак, данное выражение, действительно, равно натуральному числу 2.

Теперь рассмотрим применение этих способов в выражениях с переменными.

Пример 4

Вынесем множитель из-под корня в выражении $\sqrt{a^3}$.

Выражение $\sqrt{a^3}$ имеет смысл только при $a \geq 0$. Представим подкоренное выражение a^3 в виде произведения $a^2 \cdot a$, в котором множитель a^2 является степенью с четным показателем. Тогда, учитывая свойства квадратного корня, получаем: $\sqrt{a^3}=\sqrt{a^2\cdot a}=$
$=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{a}=a\sqrt{a}$.

Пример 5

Внесем множитель под знак корня в выражении $a^3\sqrt{a^5}$.

Считаем, что множитель $a \geq 0$ и используем свойства квадратного корня: $a^3\sqrt{a^5}=\sqrt{(a^3)^2}\cdot\sqrt{a^5}=\sqrt{a^6}\cdot\sqrt{a^5}=\sqrt{a^6\cdot a^5}=\sqrt{a^{11}}$.

Пример 6

Упростим выражение $8a\sqrt{3a}+3\sqrt{75a^3}-10\sqrt{12a^3}-2\sqrt{3a^3}$.

Данное выражение имеет смысл при $a \geq 0$. Учитывая свойства корней, вынесем множители из-под знаков корня. Получаем: $8a\sqrt{3a}+3\sqrt{75a^3}-10\sqrt{12a^3}-2\sqrt{3a^3}=8a\sqrt{3a}+3\sqrt{25a^2\cdot 3a}-10\sqrt{4a^2\cdot 3a}-$ $-2\sqrt{a^2\cdot 3a}=8a\sqrt{3a}+3\cdot 5a\sqrt{3a}-10\cdot 2a\sqrt{3a}-2a\sqrt{3a}=8a\sqrt{3a}+15a\sqrt{3a}-$ $-20a\sqrt{3a}-2a\sqrt{3a}=a\sqrt{3a}(8+15-20-2)=a\sqrt{3a}.$

Заметим, что на последнем этапе в выражение были приведены подобные члены.

Пример 7

Преобразуем произведение $(12\sqrt{3}-4\sqrt{2})(3\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

Умножим каждый член в первой скобке на каждый член во второй (аналогично произведению многочленов) и получим: $(12\sqrt{3}-4\sqrt{2})(3\sqrt{3}+\sqrt{2})=12\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}+12\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}-4\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{3}-$ $-4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=108-8=100.$

Заметим, что вычисления можно упростить, если из первой скобки вынести множитель 4 и использовать формулу разности квадратов. Получаем: $(12\sqrt{3}-4\sqrt{2})(3\sqrt{3}+\sqrt{2})=4(3\sqrt{3}-\sqrt{2})(3\sqrt{3}+\sqrt{2})=$ $=4((3\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2)=4(27-2)=100.$

Пример 8

Сократим дробь $\dfrac{2a^2-5}{a\sqrt{2}+\sqrt{5}}$.

Учтем, что $2a^2=(a\sqrt{2})^2$ и $5=(\sqrt{5})^2$. Тогда числитель дроби можно разложить на множители, используя формулу разности квадратов. Получаем: $\dfrac{2a^2-5}{a\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\dfrac{(a\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2}{a\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\dfrac{(a\sqrt{2}-\sqrt{5})(a\sqrt{2}+\sqrt{5})}{a\sqrt{2}+\sqrt{5}}=$ $=a\sqrt{2}-\sqrt{5}.$

Пример 9

Сократим дробь $\dfrac{a^2-a}{a^2-2\sqrt{2}a+2}$.

Разложим на множители числитель дроби, используя формулу разности квадратов, и знаменатель дроби, используя формулу квадрата разности. Получаем: $\dfrac{a^2-2}{a^2-2\sqrt{2}a+2}=\dfrac{a^2-(\sqrt{2})^2}{a^2-2\cdot a\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}=$

$=\dfrac{(a-\sqrt{2})(a+\sqrt{2})}{(a-\sqrt{2})^2}=\dfrac{a+\sqrt{2}}{a-\sqrt{2}}.$

Достаточно часто приходится избавляться от иррациональности в знаменателе (или числителе) дроби. Для этого числитель и знаменатель умножают на **сопряженную величину**, т. е. такую величину, чтобы знаменатель (или числитель) не содержали иррациональных выражений.

Пример 10

Избавимся от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{5c}{\sqrt{2c}}$.

Очевидно, что знаменатель дроби не будет содержать знака квадратного корня, если числитель и знаменатель дроби (умножить на величину $\sqrt{2c}$ (которая является величиной, сопряженной знаменателю, в этом случае). Получаем: $\dfrac{5c}{\sqrt{2c}}=\dfrac{5c\cdot\sqrt{2c}}{\sqrt{2c}\cdot\sqrt{2c}}=\dfrac{5c\sqrt{2c}}{2c}=$

$=\dfrac{5\sqrt{2c}}{2}.$

Мы заменили дробь $\dfrac{5c}{\sqrt{2c}}$ (содержащую иррациональность $\sqrt{2c}$ в знаменателе) тождественно равной дробью $\dfrac{5\sqrt{2c}}{2}$ (которая уже не содержит иррациональности в знаменателе).

Тем самым мы освободились от иррациональности в знаменателе дроби.

Пример 11

Избавимся от иррациональности в числителе дроби $\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$.

Чтобы избавиться от иррациональности в числителе дроби $2\sqrt{2}+\sqrt{3}$, надо умножить числитель и знаменатель на величину $2\sqrt{2}-\sqrt{3}$ (которая является сопряженной числителю величиной). При этом в числителе возникает разность квадратов чисел, которая и приводит к исчезновению квадратных корней в числителе. Получаем: $\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} = \dfrac{(2\sqrt{2}+\sqrt{3})(2\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})(2\sqrt{2}-\sqrt{3})} =$

$$= \frac{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}{3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}-3\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2}-2\cdot 3} = \frac{8-3}{12-3\sqrt{6}+4\sqrt{6}-6} = \frac{5}{6+\sqrt{6}}.$$

Таким образом, дробь $\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$ (содержащая иррациональность $2\sqrt{2}+\sqrt{3}$ в числителе) была заменена тождественно равной дробью $\dfrac{5}{6+\sqrt{6}}$ (которая не содержит иррациональности в числителе). Тем самым мы избавились от иррациональности в числителе.

Заметим, что подобные навыки избавления от иррациональности полезны и при решении более сложных задач.

Пример 12

Найдем сумму дробей $S = \dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{35}+\sqrt{36}}$.

В каждой дроби избавимся от иррациональности в знаменателе, умножив ее числитель и знаменатель на величину, сопряженную знаменателю. Получаем: $S = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{(\sqrt{1}+\sqrt{2})(\sqrt{2}-\sqrt{1})} + \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} +$

$$+ \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+\sqrt{4})(\sqrt{4}-\sqrt{3})} + \ldots + \frac{\sqrt{36}-\sqrt{35}}{(\sqrt{35}+\sqrt{36})(\sqrt{36}-\sqrt{35})} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{2-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{4-3} + \ldots + \frac{\sqrt{36}-\sqrt{35}}{36-35} =$$

$$= \sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{36}-\sqrt{35} =$$

$$= -\sqrt{1}+\sqrt{36} = -1+6 = 5.$$

Видно, что после избавления от иррациональности знаменатели всех дробей равны 1. В полученной сумме сокращаются все слагаемые, кроме $-\sqrt{1}$ и $\sqrt{36}$. В итоге получаем, что сумма всех данных иррациональных дробей равна натуральному числу 5.

Пример 13

Найдем наибольшее значение дроби $A = \dfrac{1-\sqrt{a-3}}{4-a}$.

Допустимые значения переменной в данной дроби $a \geq 3$, $a \neq 4$. Избавимся от иррациональности в числителе дроби A, умножив ее числитель и знаменатель на сопряженную величину $1+\sqrt{a-3}$. Получаем $A = \dfrac{(1-\sqrt{a-3})(1+\sqrt{a-3})}{(4-a)(1+\sqrt{a-3})} = \dfrac{1^2-(\sqrt{a-3})^2}{(4-a)(1+\sqrt{a-3})} = \dfrac{1}{1+\sqrt{a-3}}$.

Так как числитель этой дроби не зависит от переменной, а знаменатель – зависит, то **дробь принимает наибольшее значение, если имеет наименьший знаменатель** $1+\sqrt{a-3}$.

По определению квадратного корня $\sqrt{a-3} \geq 0$. Тогда наименьшее значение знаменателя $1+\sqrt{a-3}$ равно 1 и достигается при $a = 3$.

Следовательно, наибольшее значение данной дроби A равно 1 и достигается при $a = 3$.

При преобразовании иррациональных выражений часто полезно **ввести новую переменную (сделать замену переменной).**

Пример 14

Упростим выражение $\dfrac{\sqrt{\dfrac{a+2}{a-2}}+\sqrt{\dfrac{a-2}{a+2}}}{\sqrt{\dfrac{a+2}{a-2}}-\sqrt{\dfrac{a-2}{a+2}}}$.

Видно, что в данное выражение входит или величина $\sqrt{\dfrac{a+2}{a-2}}$, или обратная ей величина $\sqrt{\dfrac{a-2}{a+2}}$. Поэтому введем новую переменную $x = \sqrt{\dfrac{a+2}{a-2}}$ (очевидно, $x^2 = \dfrac{a+2}{a-2}$), тогда $\sqrt{\dfrac{a-2}{a+2}} = \dfrac{1}{x}$. После этого данное выражение имеет вид: $\dfrac{x+\dfrac{1}{x}}{x-\dfrac{1}{x}} = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$. Теперь подставим значение x^2 и получим: $\dfrac{\dfrac{a+2}{a-2}+1}{\dfrac{a+2}{a-2}-1}=\dfrac{\dfrac{2a}{a-2}}{\dfrac{4}{a-2}}=\dfrac{2a}{4}=\dfrac{a}{2}$. Итак, данное выражение равно $\dfrac{a}{2}$.

В более сложных случаях замена переменной не помогает и преобразования иррациональных выражений выполняют «напрямую».

Пример 15

Упростим выражение $A=\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}\right):\left(1+\sqrt{\dfrac{a+1}{a-1}}\right)$.

Удобно выполнить преобразования по действиям (учитывая их порядок).

1 При сложении дробей предварительно избавимся от иррациональности в знаменателях дробей. Получим: $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}+$

$$+\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}=\frac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}{(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})}+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}{(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})}=$$

$$=\frac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}{(\sqrt{a+1})^2-(\sqrt{a})^2}+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{a-1})^2}=\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}.$$

2 Приведем выражения к общему знаменателю: $1+\sqrt{\dfrac{a+1}{a-1}}=$

$$=1+\frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}=\frac{\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}.$$

3 Выполним деление выражений: $(\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}):\dfrac{\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}=$

$$=\frac{(\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1})\cdot\sqrt{a-1}}{\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}}=\sqrt{a-1}.$$

Итак, данное выражение равно $\sqrt{a-1}$ и имеет смысл при $a>1$.

IV. Задание на уроке

№ 15.3 (а, б); 15.14 (б); 15.26 (б); 15.34 (г); 15.41 (г); 15.46 (а, г); 15.52 (в, г); 15.53 (б); 15.61 (г); 15.74 (а, б); 15.96 (а); 15.101.

V. Задание на дом

№ 15.3 (б, г); 15.15 (в); 15.26 (г); 15.38 (а); 15.42 (а, в); 15.46 (б, в); 15.52 (а, б); 15.53 (в); 15.64 (г); 15.66 (б); 15.74 (в, г); 15.96 (б); 15.102.

VI. Творческие задания

1. Найдите наибольшее значение выражения. При каком значении a оно достигается?

а) $\dfrac{2-\sqrt{a-4}}{8-a}$; б) $\dfrac{3-\sqrt{a+2}}{7-a}$.

Ответы: а) $\dfrac{1}{2}$ при $a = 4$; б) $\dfrac{1}{3}$ при $a = -2$ (указание: избавьтесь от иррациональности в числителе).

2. Найдите наименьшее значение выражения. При каком значении a оно достигается?

а) $\dfrac{13-a^2}{3-\sqrt{a^2-4}}$; б) $\dfrac{a^2+24}{5-\sqrt{1-a^2}}$.

Ответы: а) 3 при $a = \pm 2$; б) 5 при $a = \pm 1$ (указание: избавьтесь от иррациональности в знаменателе).

3. Найти величину $\sqrt{(8-a)(5+a)}$, если $\sqrt{8-a}+\sqrt{5+a}=5$.

Ответ: 6 (указание: возвести в квадрат равенство $\sqrt{8-a}+$ $+\sqrt{5+a}=5$).

4. Найти сумму $\sqrt{25-a^2}+\sqrt{15-a^2}$, если разность $\sqrt{25-a^2}-\sqrt{15-a^2}=2$.

Ответ: 5 (указание: умножить равенство $\sqrt{25-a^2}-\sqrt{15-a^2}=2$ на выражение $\sqrt{25-a^2}+\sqrt{15-a^2}$).

5. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}+\sqrt{x}\right):\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$;

б) $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$;

в) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\dfrac{1}{\sqrt{x}-x^2}+x;$

г) $\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+4\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right);$

д) $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\cdot\left(\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right);$

е) $\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{y}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right);$

ж) $\dfrac{\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}{\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}}\cdot\dfrac{2\sqrt{xy}}{y-x};$

з) $a\left(\dfrac{2b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)+b\left(\dfrac{2a\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right);$

и) $\left(\dfrac{\sqrt{a}+2}{a+2\sqrt{a}+1}-\dfrac{\sqrt{a}-2}{a-1}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}};$

к) $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+ab}}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}+\sqrt{\dfrac{a+b}{a}}\right):\sqrt{\dfrac{a}{a+b}};$

л) $\dfrac{\sqrt{a}+1}{a\sqrt{a}+a+\sqrt{a}}:\dfrac{1}{a^2-\sqrt{a}}-a;$

м) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}\cdot\dfrac{a-\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right):4\sqrt{b}.$

Ответы: а) $\sqrt{x}+1$; б) 1; в) 1; г) $4x$; д) $-2\sqrt{x}$; е) $\dfrac{4}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; ж) $-2y$; з) $2ab$; и) $\dfrac{2}{a-1}$; к) $\dfrac{a+b}{a}$; л) -1; м) $\dfrac{1}{2(a-b)}$.

VII. Подведение итогов урока

§ 16. Модуль действительного числа

Уроки 33–34. Модуль числа и его свойства

Цель: уточнить понятие модуля числа и рассмотреть его свойства.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{180}$; б) $\frac{3}{7}\sqrt{147}$; в) $\sqrt{\frac{5a^6}{49}}$, при $a \le 0$.

2. Внесите множитель под знак корня:

а) $3\sqrt{7}$; б) $\frac{1}{4}\sqrt{48a}$; в) $a^3\sqrt{6}$, при при $a \le 0$.

3. Сравните значения выражений $\frac{6}{5}\sqrt{2}$ и $2\sqrt{\frac{19}{25}}$.

4. Упростите выражение $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{\sqrt{bc}}$.

Вариант 2

1. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{175}$; б) $\frac{5}{6}\sqrt{180}$; в) $\sqrt{\frac{7a^{10}}{36}}$ при $a \le 0$.

2. Внесите множитель под знак корня:

а) $4\sqrt{6}$; б) $\frac{1}{6}\sqrt{108a}$; в) $a^3\sqrt{5}$ при $a \le 0$.

3. Сравните значения выражений $\frac{3}{4}\sqrt{17}$ и $9\sqrt{\frac{1}{8}}$.

4. Упростите выражение $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{bc}}$.

III. Изучение нового материала

Обратите самое серьезное внимание на понятие модуля числа (выражения). Несмотря на то, что с таким понятием школьники знакомы с младших классов, возникают серьезные трудности при решении задач. Подобных задач очень много, и они встречаются в самых различных разделах алгебры: при решении уравнений и неравенств, исследовании функций и построении их графиков и т. д.

Сначала напомним **понятие модуля** числа и его основные свойства.

Модулем действительного числа x называется само это число x, если оно неотрицательно, и противоположное число $(-x)$, если число x отрицательно. Модуль числа x обозначают символом (значком) $|x|$.

Итак, $|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geq 0, \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$

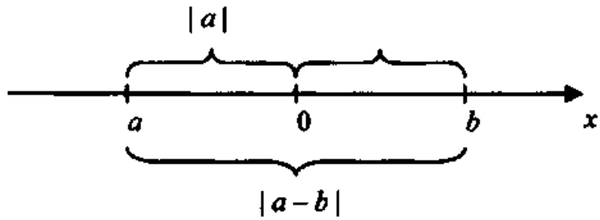
Пример 1

а) $|5{,}6| = 5{,}6$, т. к. $x = 5{,}6$ неотрицательно (и даже положительно);

б) $|0| = 0$, т. к. число $x = 0$ неотрицательно;

в) $|-2{,}3| = -(-2{,}3) = 2{,}3$, т. к. число $x = -2{,}3$ отрицательно.

На числовой оси $|a|$ отвечает расстоянию от точки a до точки 0; $|a - b|$ отвечает расстоянию между точками a и b.



Свойства модулей чисел:

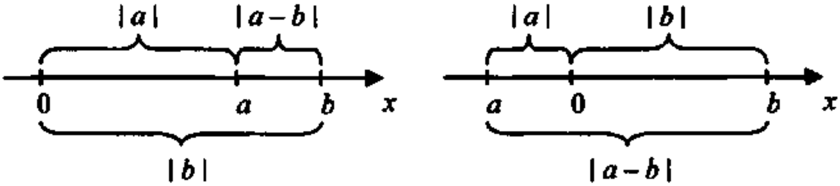
1) $|a| \geq 0$; 2) $|ab| = |a|\,|b|$; 3) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$; 4) $|a^2| = a^2$; 5) $|a| = |-a|$.

Эти свойства легко получаются из определения и геометрического смысла модуля числа a.

Пример 2

Докажем неравенство $|a - b| \leq |a| + |b|$.

Неравенство легко доказать, используя геометрический смысл модуля числа. Изобразим на числовой оси числа a и b. Тогда $|a - b|$ – расстояние между точками a и b, $|a|$ – расстояние от точки a до точки 0, $|b|$ – расстояние от точки b до точки 0.



а) б)

Если из числа a и b одного знака (рис. а) (т. е. оба положительные или оба отрицательные), то видно, что $|a-b|<|a|+|b|$.

Если числа a и b разных знаков (рис. б) (т. е. одно отрицательное, другое положительное), то видно, что $|a-b|=|a|+|b|$.

Объединяя эти два случая, получаем: $|a-b|\le|a|+|b|$.

Пример 3

Решим уравнение: а) $|x-1|=-2$; б) $|x-1|=0$; в) $|x-1|=2$.

а) Очевидно, что такое уравнение решений не имеет, т. к. расстояние между точками x и 1 не может быть отрицательным;

б) В этом уравнении расстояние между точками x и 1 равно нулю, т. е. точки x и 1 совпадают. Поэтому уравнение имеет единственное решение $x=1$.

Это решение легко проверить: $|x-1|=|1-1|=0$;

в) В таком уравнении расстояние между точками x и 1 равно 2, т. е. точка x удалена от точки 1 на две единицы. Поэтому или число x меньше числа 1 на две единицы (т. е. $x=1-2=-1$), или число x больше числа 1 на две единицы (т. е. $x=1+2=3$). Следовательно, уравнение имеет два решения: $x=-1$ и $x=3$.

Эти решения также легко проверить. Для значения $x=-1$ получаем: $|-1-1|=|-2|=-(-2)=2$. Для значения $x=3$ имеем: $|3-1|=|2|=2$.

Заметим, что возможен и другой способ решения. Если $|x-1|=2$, то сама величина $x-1$ может равняться или 2, или -2. Получаем два линейных уравнения: $x-1=2$ (его корень $x=3$) и $x-1=-2$ (корень $x=-1$).

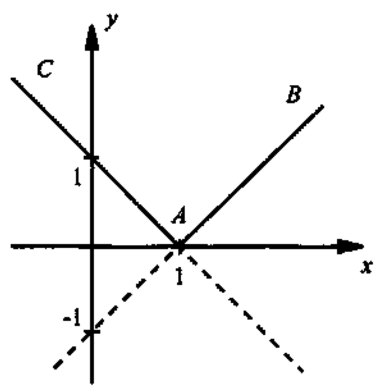
Перейдем теперь к рассмотрению **графиков функций, содержащих модуль.**

Пример 4

Построим график функции $y=|x-1|$.

Так как в формулу функции входит **модуль**, то его необходимо **раскрыть**, рассмотрев два случая. Поэтому функцию можно записать в виде $y=\begin{cases} x-1, \text{ если } x-1\geq 0, \\ -(x-1), \text{ если } x-1<0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x-1, \text{ если } x\geq 1, \\ 1-x, \text{ если } x<1. \end{cases}$

Поэтому построим график функции $y = x - 1$ и выберем из него луч AB, точки которого удовлетворяют условию $x \geq 1$. Также строим график линейной функции $y = 1 - x$ и выберем из него луч AC, точки которого удовлетворяют условию $x < 1$.



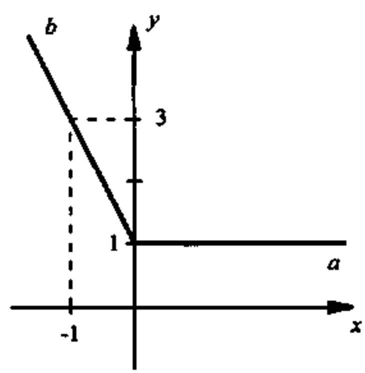
Таким образом, графиком данной функции является ломаная CAB.

Пример 5

Построим график функции $y = |x| - x + 1$.

Так как в эту функцию входит $|x|$, то необходимо рассмотреть два случая.

а) Если $x \geq 0$, то $|x| = x$ и получаем $y = x - x + 1 = 1$ или $y = 1$. Строим прямую $y = 1$ для неотрицательных значений x ($x \geq 0$).



б) Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и имеем $y = -x - x + 1 = -2x + 1$ или $y = -2x + 1$. Для отрицательных x ($x < 0$) строим прямую $y = -2x + 1$. В результате получаем график данной функции, состоящий из лучей a и b.

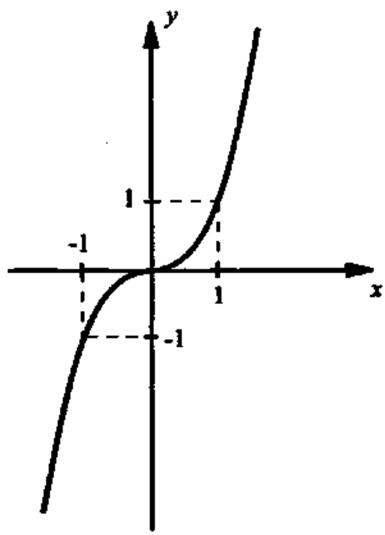
Пример 6

Построим график функции $y = x|x|$.

Вновь раскроем $|x|$, рассмотрев два случая.

а) Если $x \geq 0$, то $|x| = x$ и функция имеет вид $y = x \cdot x = x^2$. Построим параболу $y = x^2$ для неотрицательных значений x (т. е. $x \geq 0$).

б) Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и функция имеет вид $y = x \cdot (-x) = -x^2$. Строим параболу $y = -x^2$ для отрицательных значений x (т. е. $x < 0$).

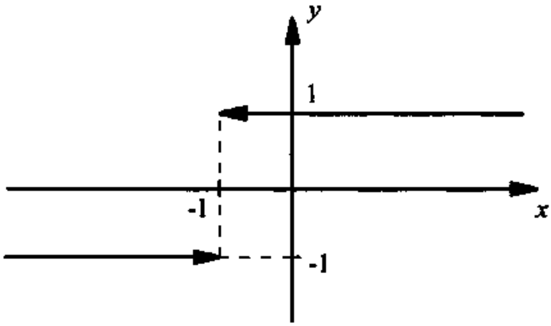


Пример 7

Построим график функции $y = \dfrac{x+1}{|x+1|}$.

Величина $a = x + 1$, стоящая под знаком модуля, может быть как положительной, так и отрицательной (нулю эта величина равняться не может). Поэтому по определению модуля запишем функцию

в виде $y = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x+1}, \text{ если } x+1>0, \\ \dfrac{x+1}{-(x+1)}, \text{ если } x+1<0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 1, \text{ если } x>-1, \\ -1, \text{ если } x<-1. \end{cases}$ Строим прямую с уравнением $y = 1$ для $x > -1$ и прямую $y = -1$ для $x < -1$. В точке $x = -1$ функция не определена. Поэтому точки графика, для которых $x = -1$, указаны стрелками (эти точки в график не входят).



Пример 8

Найдем значение выражения $\sqrt{x^2}$ при $x = 8$ и при $x = -7$.

Получаем: $\sqrt{8^2} = \sqrt{64} = 8$ и $\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7$. В каждом из этих примеров корень из квадрата числа равнялся модулю этого числа: $\sqrt{8^2} = |8| = 8$ и $\sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7$.

Обобщим результаты этих примеров и докажем теорему.

Теорема. При любом значении x верно равенство $\sqrt{x^2} = |x|$.

Рассмотрим два случая.

а) Если $x \geq 0$, то по определению арифметического корня $\sqrt{x^2} = x$. Так как $x \geq 0$, то $x = |x|$ и равенство может быть записано в виде $\sqrt{x^2} = |x|$.

б) Если $x < 0$, то величина $-x > 0$ и получаем $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2} = -x$. Так как $x < 0$, то $-x = |x|$ и равенство $\sqrt{x^2} = -x$ можно записать в виде $\sqrt{x^2} = |x|$.

Значит, при любом значении x выполнено равенство $\sqrt{x^2} = |x|$.

Пример 9

Извлечем корень $\sqrt{c^6}$ при $c < 0$.

Представим c^6 в виде $c^6=(c^3)^2$ и используем тождество. Получаем $\sqrt{c^6}=\sqrt{(c^3)^2}=\left|c^3\right|=-c^3$. Учтено, что $c<0$, тогда $c^3<0$ и $|c^3|=-c^3$ (по определению модуля).

Пример 10

Упростим выражение $A=(a-3)\sqrt{\dfrac{16}{a^2-6a+9}}$.

Учтем, что знаменатель подкоренного выражения является квадратом разности. Получаем: $A=(a-3)\sqrt{\dfrac{16}{(a-3)^2}}=\dfrac{(a-3)\sqrt{16}}{\sqrt{(a-3)^2}}=$

$=\dfrac{(a-3)\cdot 4}{|a-3|}$. Раскроем знак модуля, рассмотрев два случая:

а) если $a>3$, то $a-3>0$ и $|a-3|=a-3$, данное выражение равно $A=\dfrac{(a-3)\cdot 4}{a-3}=4$;

б) если $a<3$, то $a-3<0$ и $|a-3|=-(a-3)$, данное выражение равно $A=\dfrac{(a-3)\cdot 4}{-(a-3)}=-4$.

Итак, выражение $A=4$ при $a>3$ и $A=-4$ при $a<3$.

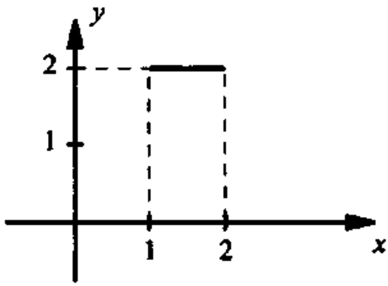
При $a=3$ выражение A не имеет смысла. И вновь результат существенно зависит от величины переменной a.

Пример 11

Упростим выражение $y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ и построим график функции $y(x)$ для $1\le x\le 2$.

Введем новую переменную $a=\sqrt{x-1}$ (очевидно, допустимые значения $x\ge 1$). Возведем в квадрат обе части этого равенства $a^2=x-1$ и выразим величину $x=a^2+1$. Подставим эту величину x в данное выражение $y=\sqrt{a^2+1+2a}+\sqrt{a^2+1-2a}=$

$=\sqrt{(a+1)^2}+\sqrt{(a-1)^2}=|a+1|+|a-1|$. Чтобы раскрыть знаки модуля в этом выражении, оценим величину a. При $1\le x\le 2$ величина $x-1$ принимает значения $0\le x-1\le 1$, и величина $a=\sqrt{x-1}$ имеет значения $0\le a\le 1$. Тогда $y=a+1-(a-1)=2$. Строим эту прямую на отрезке $x\in[1;\,2]$.



IV. Контрольные вопросы

1. Дайте определение модуля действительного числа.
2. Напишите основные свойства модуля числа.
3. Геометрический смысл модуля числа.
4. Сформулируйте и докажите теорему о корне из квадрата числа.

V. Задание на уроке

№ 16.3 (а, б); 16.7 (а, б); 16.10; 16.16 (б); 16.18; 16.24 (а, б); 16.30 (а); 16.31 (а, г); 16.3 (б); 16.34; 16.37; 16.39 (а); 16.40 (а, б); 16.43 (б).

VI. Задание на дом

№ 16.3 (б, г); 16.7 (в, г); 16.9; 16.16 (в); 16.20; 16.24 (в, г); 16.30 (б); 16.31 (б, в); 16.33 (а); 16.35; 16.36; 16.39 (б); 16.40 (в, г); 16.43 (г).

VII. Подведение итогов урока

Уроки 35–36. Контрольная работа № 3 по теме «Функция $y=\sqrt{x}$. Свойства квадратного корня»

Цель: проверка знаний учащихся с использованием разноуровневых вариантов.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в 6 вариантах различной сложности (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – сложнее, варианты 5, 6 – самые сложные). При этом сложность вариантов нарастает не очень резко. Каждый вариант содержит 6 задач примерно одинаковой сложности (может быть, несколько сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач. Одна задача является резервной (или запасной) и дает некоторую возможность выбора учащимся. При таких же критериях оценки в случае вариантов 3, 4 дается дополнительно 0,5 балла и в случае вариантов 5, 6 – дополнительно 1,0 балла (учитывая более высокую сложность этих вариантов). Поэтому в случае вариантов 5, 6 оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач.

Выбор вариантов может быть сделан учителем или учащимся (при этом число экземпляров вариантов должно быть достаточным). Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

III. Варианты работы

Вариант 1

1. Запишите дробь $\frac{2}{15}$ в виде десятичной периодической дроби.

2. Сравните числа $A=\frac{2}{7}\sqrt{7}$ и $B=\frac{1}{4}\sqrt{20}$.

3. Сократите дробь $\frac{9-a}{\sqrt{a}-3}$.

4. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{13}-\sqrt{11}}$.

5. Постройте график функции $y=(\sqrt{x-2})^2+3|x|$.

6. Найдите значение выражения $\frac{1}{3\sqrt{2}-1}-\frac{1}{3\sqrt{2}+1}$.

Вариант 2

1. Запишите дробь $\frac{5}{12}$ в виде десятичной периодической дроби.

2. Сравните числа $A=\frac{3}{5}\sqrt{20}$ и $B=\frac{2}{3}\sqrt{12}$.

3. Сократите дробь $\frac{16-a}{\sqrt{a}-4}$.

4. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{14}-\sqrt{11}}$.

5. Постройте график функции $y=(\sqrt{x-1})^2+2|x|$.

6. Найдите значение выражения $\frac{1}{1+2\sqrt{3}}+\frac{1}{1-2\sqrt{3}}$.

Вариант 3

1. Запишите число 2,(12) в виде обыкновенной дроби.

2. Сравните числа $A=\sqrt{22}-\sqrt{20}$ и $B=\sqrt{20}-\sqrt{18}$.

3. Сократите дробь $\frac{4a^2-4a\sqrt{b}+b}{\sqrt{b}-2a}$.

4. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{12\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$.

5. Постройте график функции $|y-2x+1|=2$.

6. Найдите значение выражения $(3-2\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^2$.

Вариант 4

1. Запишите число 3,(16) в виде обыкновенной дроби.

2. Сравните числа $A=\sqrt{21}-\sqrt{19}$ и $B=\sqrt{23}-\sqrt{21}$.

3. Сократите дробь $\frac{4a^2+6a\sqrt{b}+9b}{a+3\sqrt{b}}$.

4. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{6\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$.

5. Постройте график функции $|y+3x-2|=1$.

6. Найдите значение выражения $(7-4\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^2$.

Вариант 5

1. Найдите значение выражения $(2\sqrt{3}+5)^2+(10-\sqrt{3})^2$.

2. Упростите выражение $\frac{a+\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}+\frac{a-1}{1+\sqrt{a}}-2\sqrt{a}$.

3. Вычислите: $\sqrt{(12-\sqrt{13})^2}+\sqrt{(3-\sqrt{13})^2}$.

4. Постройте график функции $y=\sqrt{x^2-4x+4}+x$.

5. Сравните числовые выражения $A=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ и $B=\sqrt{10}$.

6. Известно, что $\sqrt{28-a}-\sqrt{13-a}=3$. Найдите $\sqrt{28-a}+\sqrt{13-a}$.

Вариант 6

1. Найдите значение выражения $(3\sqrt{2}+2)^2+(6-\sqrt{2})^2$.

2. Упростите выражение $\dfrac{a-2\sqrt{a}+1}{1-\sqrt{a}}+\dfrac{a-1}{1-\sqrt{a}}+2\sqrt{a}$.

3. Вычислите: $\sqrt{(15-\sqrt{11})^2}+\sqrt{(2-\sqrt{11})^2}$.

4. Постройте график функции $y=\sqrt{x^2-4x+4}-x$.

5. Сравните числовые выражения $A=\sqrt{2}+\sqrt{5}$ и $B=\sqrt{13}$.

6. Известно, что $\sqrt{39-a}+\sqrt{27-a}=4$. Найдите $\sqrt{39-a}-\sqrt{27-a}$.

Урок 37. Итоги контрольной работы

Цели: сообщить результаты работы, рассмотреть наиболее типичные ошибки, разобрать трудные задачи.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Итоги контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения.

Данные о результатах работы удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи / Итоги	1	2	3	...	6
+	5				
±	1				
—	1				
Ø	1				

Обозначения:

\+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;

± – число решивших задачу со значительными ошибками;

— – число не решивших задачу;

Ø – число не решавших задачу.

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.

3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, решившими эту задачу).

4. Разбор всей контрольной работы (вывесить на стенде ответы к заданиям вариантов и разбор наиболее трудных вариантов).

III. Ответы и решения

Ответы

Вариант 1

1. *Ответ*: 0,1(3).
2. *Ответ*: $A < B$.
3. *Ответ*: $-\sqrt{a}-3$ при $a \geq 0$, $a \neq 9$.
4. *Ответ*: $3(\sqrt{26}+\sqrt{22})$.
5. *Ответ*: график $y = 4x - 2$ при $x \geq 2$.
6. *Ответ*: $\frac{2}{17}$.

Вариант 2

1. *Ответ*: 0,41(6).
2. *Ответ*: $A > B$.
3. *Ответ*: $-\sqrt{a}-4$ при $a \geq 0$, $a \neq 16$.
4. *Ответ*: $\sqrt{70}+\sqrt{55}$.
5. *Ответ*: график $y = 3x - 1$ при $x \geq 1$.
6. *Ответ*: $-\frac{2}{11}$.

Вариант 3

1. *Ответ*: $2\frac{4}{33}$.
2. *Ответ*: $A < B$.
3. *Ответ*: $-2a+\sqrt{b}$ при $b \geq 0$, $\sqrt{b}-2a \neq 0$.
4. *Ответ*: $2(3\sqrt{6}+6)$.
5. *Ответ*: две прямые $y = 2x - 3$ и $y = 2x + 1$.
6. *Ответ*: 1.

Вариант 4

1. *Ответ*: $3\frac{16}{99}$.
2. *Ответ*: $A > B$.
3. *Ответ*: $a+3\sqrt{b}$ при $b \geq 0$, $a+3\sqrt{b} \neq 0$.

4. *Ответ*: $3(10+3\sqrt{10})$.

5. *Ответ*: две прямые $y = -3x + 1$ и $y = -3x + 3$.

6. *Ответ*: 1.

Решение

Вариант 5

1. Используем формулы квадрата суммы и квадрата разности, выполним действия и получим:

$$(2\sqrt{3}+5)^2+(10-\sqrt{3})^2=(2\sqrt{3})^2+2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 5+5^2+10^2-2\cdot 10\cdot\sqrt{3}+$$

$$+(\sqrt{3})^2=12+25+100+3=140.$$

Ответ: 140.

2. Разложим числители дробей на множители и сократим дроби. Имеем:

$$\frac{a+\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}+\frac{a-1}{1+\sqrt{a}}-2\sqrt{a}=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)}{1+\sqrt{a}}+\frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}{1+\sqrt{a}}-2\sqrt{a}=$$

$$=\sqrt{a}+\sqrt{a}-1-2\sqrt{a}=-1.$$

Ответ: -1.

3. Извлечем квадратные корни из выражений и раскроем модули. Получаем:

$$\sqrt{(12-\sqrt{13})^2}+\sqrt{(3-\sqrt{13})^2}=\left|12-\sqrt{13}\right|+\left|3-\sqrt{13}\right|=$$

$=12-\sqrt{13}-(3-\sqrt{13})=9.$ Было учтено, что $\sqrt{13}\approx 3{,}6$.

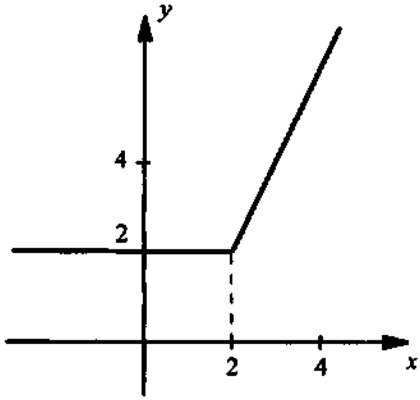
Ответ: 9.

4. Учитывая свойство квадратного корня, запишем функцию в виде $y=\sqrt{x^2-4x+4}+x=\sqrt{(x-2)^2}+x=|x-2|+x$.

Для построения графика функции $y=|x-2|+x$ раскроем знак модуля.

а) При $x < 2$ величина $x - 2 < 0$ и $|x - 2| = -(x - 2) = 2 - x$. Поэтому функция имеет вид $y = 2 - x + x$ или $y = 2$. Строим график этой функции для $x < 2$.

б) При $x \geq 2$ величина $x - 2 \geq 0$ и $|x - 2| = x - 2$. Тогда функция имеет вид $y = x - 2 + x = 2x - 2$. Строим график этой функции для $x \geq 2$.



Ответ: см. график.

5. Очевидно, что значения выражений A и B являются положительными. Рассмотрим квадраты этих величин: $A^2=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2=$ $=3+2\sqrt{6}+2=5+2\sqrt{6}$ и $B^2=(\sqrt{10})^2=10=5+5$. Теперь сравним числа $2\sqrt{6}$ и 5. Так как $6<6{,}25$, то $\sqrt{6}<\sqrt{6{,}25}=2{,}5$ и $2\sqrt{6}<5$. Поэтому $A^2<B^2$ и $A<B$.

Ответ: $A<B$.

6. Умножим обе части равенства $\sqrt{28-a}-\sqrt{13-a}=3$ на сопряженную величину $\sqrt{28-a}+\sqrt{13-a}$ и получим: $(\sqrt{28-a}-\sqrt{13-a})(\sqrt{28-a}+\sqrt{13-a})=3(\sqrt{28-a}+\sqrt{13-a})$, или $28-a-(13-a)=3(\sqrt{28-a}+\sqrt{13-a})$, или $15=3(\sqrt{28-a}+\sqrt{13-a})$, откуда $\sqrt{28-a}+\sqrt{13-a}=5$.

Ответ: 5.

Вариант 6

1. Используем формулы квадрата суммы и квадрата разности, выполним действия и получим:

$(3\sqrt{2}+2)^2+(6-\sqrt{2})^2=(3\sqrt{2})^2+2\cdot3\sqrt{2}\cdot2+2^2+6^2-2\cdot6\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=$
$=18+4+36+2=60.$

Ответ: 60.

2. Разложим числители дробей на множители и сократим дроби. Имеем:

$$\frac{a-2\sqrt{a}+1}{1-\sqrt{a}}+\frac{a-1}{1-\sqrt{a}}+2\sqrt{a}=\frac{(1-\sqrt{a})^2}{1-\sqrt{a}}-\frac{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a})}{1-\sqrt{a}}+2\sqrt{a}=$$

$=1-\sqrt{a}-(1+\sqrt{a})+2\sqrt{a}=1-\sqrt{a}-1-\sqrt{a}+2\sqrt{a}=0.$

Ответ: 0.

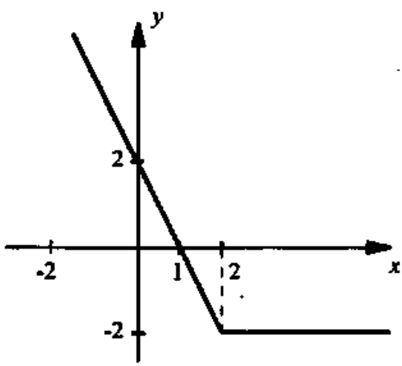
3. Извлечем квадратные корни из выражений и раскроем модули. Получаем: $\sqrt{(15-\sqrt{11})^2}+\sqrt{(2-\sqrt{11})^2}=|15-\sqrt{11}|+|2-\sqrt{11}|=$ $=15-\sqrt{11}-(2-\sqrt{11})=13$. Было учтено, что $\sqrt{11}\approx 3{,}3$.

Ответ: 13.

4. Учитывая свойство квадратного корня, запишем функцию в виде $y=\sqrt{x^2-4x+4}-x=\sqrt{(x-2)^2}-x=|x-2|-x$. Для построения графика функции $y=|x-2|-x$ раскроем знак модуля.

а) При $x<2$ величина $x-2<0$ и $|x-2|=-(x-2)=2-x$. Поэтому функция имеет вид $y=2-x-x$ или $y=2-2x$. Строим график этой функции для $x<2$.

б) При $x\geq 2$ величина $x-2\geq 0$ и $|x-2|=x-2$. Тогда функция имеет вид $y=x-2-x$ или $y=-2$. Строим график функции $y=-2$ для $x\geq 2$.



Ответ: см. график.

5. Очевидно, что значения выражений A и B являются положительными. Рассмотрим квадраты этих величин: $A^2=(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2=$ $=2+2\sqrt{10}+5=7+2\sqrt{10}$ и $B^2=13=7+6$. Теперь сравним числа $2\sqrt{10}$ и 6. Так как $10>9$, то $\sqrt{10}>3$ и $2\sqrt{10}>6$. Поэтому $A^2>B^2$ и $A>B$.

Ответ: $A>B$.

6. Умножим обе части равенства $\sqrt{39-a}+\sqrt{27-a}=4$ на сопряженную величину $\sqrt{29-a}-\sqrt{27-a}$ и получим: $(\sqrt{39-a}+\sqrt{27-a})(\sqrt{39-a}-\sqrt{27-a})=4(\sqrt{39-a}-\sqrt{27-a})$, или

$39-a-(27-a)=4(\sqrt{39-a}-\sqrt{27-a})$, или $12=4(\sqrt{39-a}-\sqrt{27-a})$, откуда $\sqrt{39-a}-\sqrt{27-a}=3$.

Ответ: 3.

Уроки 38–39. Зачетная работа по теме «Функция $y\sqrt{x}$. Свойства квадратного корня»

Цели: сравнение успеваемости учащихся при одинаковой сложности заданий, возможность повышения оценки за контрольную работу.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Характеристика зачетной работы

Работа составлена в двух равноценных вариантах. По сравнению с контрольной работой увеличено количество заданий. Соответственно у учащихся возрастает возможность выбора задач. Все задания разбиты на блоки А, В и С. Самые простые задачи находятся в части А, более сложные – в части В, еще сложнее – в части С. Каждая задача из блока А оценивается в 1 балл, из блока В – в 2 балла, из блока С – в 3 балла. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов и блока С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» – за 10 баллов, оценка «5» – за 14 баллов.

Так как эта работа является зачетной, то в нее не включены принципиально новые задачи. Поэтому разбору заданий работы отдельного занятия можно и не посвящать (решения задач могут быть вывешены на стенде). Для стендового размещения разбор вариантов приводится.

III. Варианты зачетной работы

Вариант 1

А

1. Вычислите: $\sqrt{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{98}-2\sqrt{32})$.

2. Сравните числа $3\sqrt{7}$ и $\sqrt{62}$.

3. Найдите значение выражения $\sqrt{8-\sqrt{15}}\cdot\sqrt{\sqrt{15}+8}$.

4. Сократите дробь $\dfrac{3-\sqrt{3}a}{a^2-3}$.

5. Решите уравнение $\sqrt{x^2-6x+9}=2$.

6. Упростите выражение $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\dfrac{x+4\sqrt{xy}+4y}{\sqrt{x}+2\sqrt{y}}$ и найдите его значение при $x=3\dfrac{1}{81}$ и $y=\dfrac{1}{81}$.

7. Постройте график функции $y=5\sqrt{x}-3\sqrt{-x}$.

B

8. Известно, что $x=3-\sqrt{11}$ и $y=3+\sqrt{11}$. Найдите значение выражения $y\sqrt{x^2}$.

9. Упростите выражение $\left(\dfrac{a}{a-\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{2}}{a+\sqrt{2}}\right):\dfrac{a^2+2}{a^2+a\sqrt{2}}$.

10. Сравните числа $A=\dfrac{3}{4-2\sqrt{2}}+\dfrac{3}{4+2\sqrt{2}}$ и $B=\sqrt{7}$.

11. Решите уравнение $\sqrt{3+\sqrt{2-x}}=4$.

C

12. Сократите дробь $\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}-a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}+a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}$.

13. Упростите выражение $(\sqrt{2}+1)^2-(\sqrt{2}-3)^2-\sqrt{32}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}+$ $+\sqrt{11+6\sqrt{2}}$.

14. Постройте график зависимости $y(x)$, если выполняется условие $\sqrt{y^2-2x^2+1}=1-y$.

Вариант 2

А

1. Вычислите: $\sqrt{3}(2\sqrt{3}+3\sqrt{75}-\sqrt{108})$.

2. Сравните числа $2\sqrt{8}$ и $\sqrt{33}$.

3. Найдите значение выражения $\sqrt{9-\sqrt{17}}\cdot\sqrt{\sqrt{17}+9}$.

4. Сократите дробь $\dfrac{5-\sqrt{5}a}{a^2-5}$.

5. Решите уравнение $\sqrt{x^2-4x+4}=3$.

6. Упростите выражение $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{x-4\sqrt{xy}+4y}{\sqrt{x}-2\sqrt{y}}$ и найдите его значение при $x=2{,}08$ и $y=\dfrac{1}{9}$.

7. Постройте график функции $y=2\sqrt{x}-3\sqrt{-x}$.

B

8. Известно, что $x=2-\sqrt{7}$ и $y=2+\sqrt{7}$. Найдите значение выражения $y\sqrt{x^2}$.

9. Упростите выражение $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\dfrac{a^2+ab}{a-b}$.

10. Сравните числа $A=\dfrac{2}{5+3\sqrt{3}}-\dfrac{2}{5-3\sqrt{3}}$ и $B=\sqrt{110}$.

11. Решите уравнение $\sqrt{2+\sqrt{3-x}}=4$.

C

12. Сократите дробь $\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}+a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}$.

13. Упростите выражение $(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+2)^2-\sqrt{12}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}-$ $-\sqrt{7+4\sqrt{3}}$.

14. Постройте график зависимости $y(x)$, если выполняется условие $\sqrt{y^2-2x^2+1}=y-1$.

IV. Разбор заданий зачетной работы

Вариант 1

1. *Ответ*: 4.

2. *Ответ*: $3\sqrt{7}>\sqrt{62}$.

3. *Ответ*: 7.

4. *Ответ*: $-\dfrac{\sqrt{3}}{a+\sqrt{3}}$ при $a\neq\pm\sqrt{3}$.

5. *Ответ*: $x_1 = 5$ и $x_2 = 1$.

6. *Ответ*: $-3\sqrt{y}$; $-\frac{1}{3}$.

7. *Ответ*: график – единственная точка (0; 0).

8. *Ответ*: 2.

9. *Ответ*: $\frac{a}{a-\sqrt{2}}$ при $a \neq 0$, $a \neq \pm\sqrt{2}$.

10. *Ответ*: $A > B$.

11. *Ответ*: $x = -167$.

Решения

12. Сгруппируем члены в числителе и знаменателе, разложим их на множители и сократим дробь. Получаем:

$$\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}-a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}+a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}=\frac{(a\sqrt{a}-a\sqrt{b})+(b\sqrt{b}-b\sqrt{a})}{(a\sqrt{a}+a\sqrt{b})-(b\sqrt{b}+b\sqrt{a})}=$$

$$=\frac{a(\sqrt{a}-\sqrt{b})-b(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a(\sqrt{a}+\sqrt{b})-b(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a-b)}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-b)}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

13. Прежде всего надо заметить, что подкоренные выражения являются полными квадратами: $3-2\sqrt{2}=2-2\sqrt{2}+1=(\sqrt{2})^2-$ $-2\cdot\sqrt{2}\cdot1+1^2=(\sqrt{2}-1)^2$ и $11+6\sqrt{2}=9+2\cdot3\cdot\sqrt{2}+2=3^2+2\cdot3\cdot\sqrt{2}+$ $+(\sqrt{2})^2=(3+\sqrt{2})^2$. После этого легко упростить данное выражение: $(\sqrt{2}+1)^2-(\sqrt{2}-3)^2-\sqrt{32}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}=$

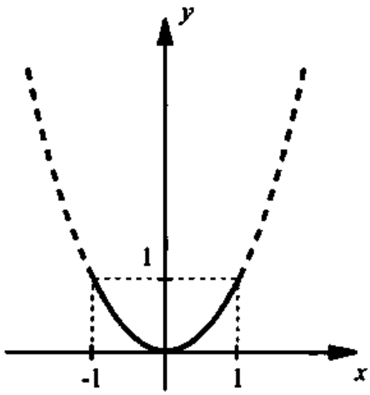
$$=2+2\sqrt{2}+1-2+6\sqrt{2}-9-4\sqrt{2}-\left|\sqrt{2}-1\right|+\left|3+\sqrt{2}\right|=$$

$$=-8+4\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)+(3+\sqrt{2})=-4+4\sqrt{2}.$$

Ответ: $-4+4\sqrt{2}$.

14. Так как левая часть равенства $\sqrt{y^2-2x^2+1}=1-y$ по определению квадратного корня неотрицательна, то и правая часть должна быть неотрицательной, т. е. $1-y \geq 0$, откуда $y \leq 1$. Возведем в квадрат обе части данного равенства: $y^2-2x^2+1=(1-y)^2$ (при этом подкоренное выражение y^2-2x^2+1 неотрицательно, т. к. оно

равно $(1-y)^2 \geq 0$), или $y^2-2x^2+1=1-2y+y^2$, или $y=x^2$ (причем $y \leq 1$). Поэтому построим параболу $y=x^2$ и выберем ту ее часть, для которой $y \leq 1$ (сплошная линия).



Ответ: см. график.

Вариант 2

1. *Ответ*: 33.
2. *Ответ*: $2\sqrt{8}<\sqrt{33}$.
3. *Ответ*: 8.
4. *Ответ*: $-\dfrac{\sqrt{5}}{a+\sqrt{5}}$ при $a \neq \pm\sqrt{5}$.
5. *Ответ*: $x_1=5$ и $x_2=-1$.
6. *Ответ*: $3\sqrt{y}$; 1.
7. *Ответ*: график – единственная точка (0; 0).
8. *Ответ*: 3.
9. *Ответ*: $\dfrac{1}{a}$ при $a, b \geq 0, a \neq 0, a \neq b$.
10. *Ответ*: $A<B$.
11. *Ответ*: $x=-193$.

Решения

12. Сгруппируем члены в числителе и знаменателе, разложим их на множители и сократим дробь. Получаем:

$$\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}+a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}=\frac{(a\sqrt{a}+b\sqrt{a})+(b\sqrt{b}+a\sqrt{b})}{(a\sqrt{a}-b\sqrt{a})+(a\sqrt{b}-b\sqrt{b})}=$$

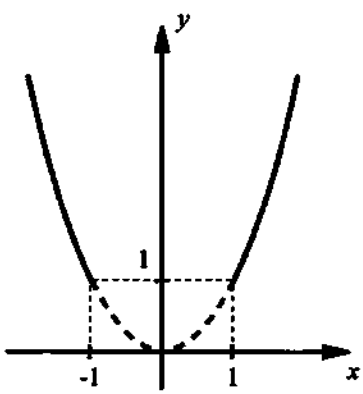
$$= \frac{\sqrt{a}(a+b)+\sqrt{b}(a+b)}{\sqrt{a}(a-b)+\sqrt{b}(a-b)} = \frac{(a+b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{a+b}{a-b}.$$

Ответ: $\frac{a+b}{a-b}$.

13. Прежде всего надо заметить, что подкоренные выражения являются полными квадратами: $4-2\sqrt{3}=3-2\sqrt{3}+1=(\sqrt{3})^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot 1+$ $+1^2=(\sqrt{3}-1)^2$ и $7+4\sqrt{3}=3+4\sqrt{3}+4=(\sqrt{3})^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot 2+2^2=(\sqrt{3}+2)^2$. После этого легко упростить данное выражение: $(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+2)^2-$ $-\sqrt{12}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\sqrt{7+4\sqrt{3}}=3-2\sqrt{3}+1+3+4\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}+$ $+|\sqrt{3}-1|-|\sqrt{3}+2|=11+(\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}+2)=8$.

Ответ: 8.

14. Так как левая часть равенства $\sqrt{y^2-2x^2+1}=y-1$ по определению квадратного корня неотрицательна, то и правая часть должна быть неотрицательной, т. е. $y-1\geq 0$, откуда $y\geq 1$. Возведем в квадрат обе части данного равенства: $y^2-2x^2+1=(y-1)^2$ (при этом подкоренное выражение y^2-2x^2+1 неотрицательно, т. к. оно равно $(y-1)^2\geq 0$), или $y^2-2x^2+1=y^2-2y+1$, или $y=x^2$ (причем $y\geq 1$). Поэтому построим параболу $y=x^2$ и выберем ту ее часть, для которой $y\geq 1$ (сплошная линия).



Ответ: см. график.

Глава 3. Квадратичная функция, функция $y = \frac{k}{x}$

§ 17. Функция $y = kx^2$, ее свойства и график

Уроки 40–41. Квадратичная функция $y = kx^2$

Цель: расширить понятие квадратичной функции, рассмотреть ее свойства и график.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

В конце 7-го класса были рассмотрены функции $y = x^2$ и $y = -x^2$, их свойства и графики. Такие функции называют **квадратичными.** Теперь обсудим квадратичную функцию $y = kx^2$ (где k – некоторое число, $k \neq 0$). Очевидно, при $k = \pm 1$ мы получим уже известные нам функции. Поэтому рассмотрим влияние величины и знака коэффициента k на свойства и графики функции $y = kx^2$.

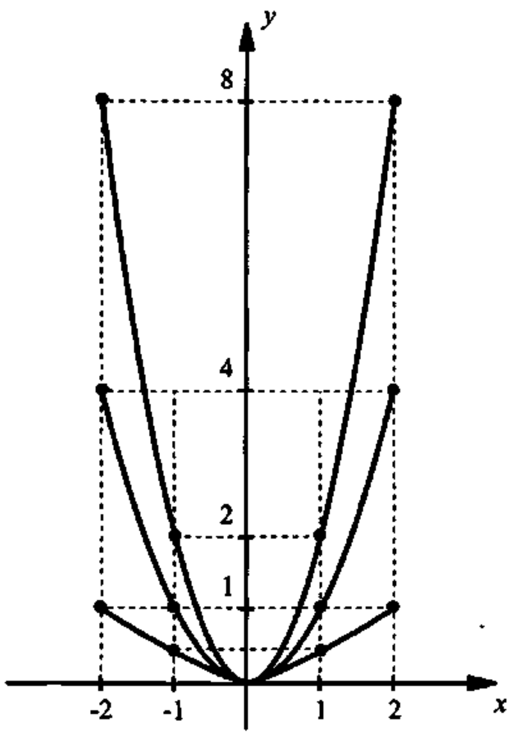
Сначала обсудим свойства такой функции при положительных значениях k.

Свойства функции $y = kx^2$ при $k > 0$

Для наглядности обсуждения в одной системе координат построим графики трех квадратичных функций: $y = 0{,}5x^2$, $y = x^2$ и $y = 2x^2$. Составим предварительно таблицу значений функций.

x	-2	-1	0	1	2
$y = 0{,}5x^2$	2	0,5	0	0,5	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8

Отметив соответствующие точки, построим графики этих функций. Видно, что графиками этих функций являются параболы с вершиной в начале координат. При этом ось y является осью симметрии параболы. Ветви параболы направлены вверх. При увеличении k функция изменяется быстрее.



Перечислим свойства функции $y = kx^2$ при $k > 0$:

1) Область определения функции – вся числовая ось, т. е. $x \in (-\infty; \infty)$.

2) Значение $y = 0$ при $x = 0$ и $y > 0$ при $x \neq 0$, т. е. значения функции $y \geq 0$ (график функции лежит не ниже оси Ox). Поэтому функция ограничена снизу.

3) Функция непрерывная.

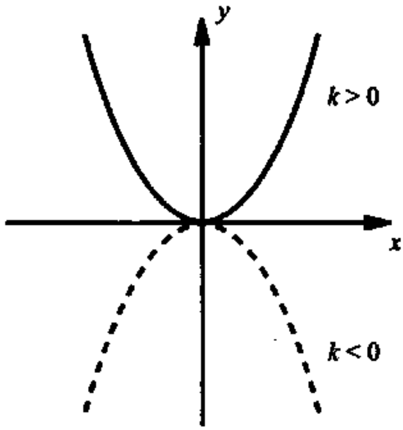
4) Наименьшее значение функции $y_{наим} = 0$ достигается при $x = 0$ (наибольшего значения функции не существует).

5) Функция возрастает при $x \geq 0$ и убывает при $x \leq 0$.

6) Область значений функции – луч $[0; \infty)$.

7) Функция выпукла вниз.

Уже из 7-го класса известно, что графики функций $y = x^2$ и $y = -x^2$ симметричны друг другу относительно оси абсцисс. То же можно сказать, например, про графики функций $y = 3x^2$ и $y = -3x^2$. Вообще говоря, **график функции $y = -f(x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно оси абсцисс**. Этот факт позволяет сразу сформулировать **свойства функции $y = kx^2$ при $k < 0$:**



1) Область определения функции – вся числовая ось, т. е. $x \in (-\infty; \infty)$.

2) Значение $y = 0$ при $x = 0$ и $y < 0$ при $x \neq 0$, т. е. значения функции $y \leq 0$ (график функции лежит не выше оси Ox). Поэтому функция ограничена сверху.

3) Функция непрерывная.

4) Наибольшее значение функции $y_{наиб} = 0$ достигается при $x = 0$ (наименьшего значения функции не существует).

5) Функция возрастает при $x \leq 0$ и убывает при $x \geq 0$.

6) Область значений функции – луч $(-\infty; 0]$.

7) Функция выпукла вверх.

Заметим, что квадратичная функция находит широкое **применение в математике и физике**. Например:

а) Площадь квадрата со стороной a описывается формулой $S = a^2$ (коэффициент $k = 1$).

б) Площадь круга радиуса R равна $S = \pi R^2$, где π – иррациональное число, $\pi \approx 3{,}14$ (коэффициент $k = 1$).

в) Кинетическая энергия тела массой m, движущегося со скоростью v, вычисляется по формуле $E = \frac{m}{2}v^2$ (коэффициент $k = \frac{m}{2}$).

г) Потенциальная энергия сжатой пружины равна $E = \frac{n}{2}x^2$, где x – изменение длины пружины, n – коэффициент упругости пружины (коэффициент $k = \frac{n}{2}$) и т. д.

Рассмотрим наиболее типичные задачи по теме.

Пример 1

График квадратичной функции $y = kx^2$ проходит через точку $A(-4; -2)$. Найдем коэффициент k.

Очевидно, что координаты точки $A(-4; -2)$ удовлетворяют равенству $y = kx^2$. Получаем уравнение: $-2 = k\cdot(-4)^2$ или $-2 = k\cdot 16$, откуда $k = -\frac{2}{16} = -\frac{1}{8}$.

Пример 2

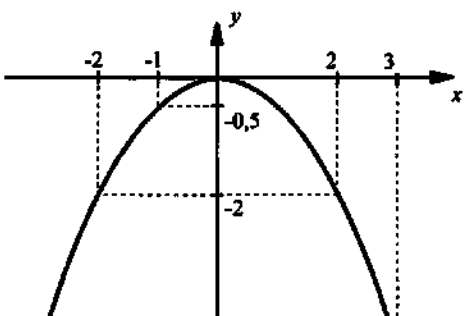
Найдем наименьшее и наибольшее значения функции $y = -0{,}5x^2$ на отрезке: а) $[-2; 0]$; б) $[-1; 2]$; в) $[-2; 3]$.

Построим график функции $y = -0{,}5x^2$ и рассмотрим его на указанных промежутках.

а) На промежутке $[-2; 0]$ функция возрастает. Поэтому наименьшее значение $y_{наим} = -2$ достигается на левой границе промежутка, т. е. при $x = -2$. Наибольшее значение $y_{наиб} = 0$ достигается на правой границе промежутка, т. е. при $x = 0$.

б) Наименьшее значение $y_{наим} = -2$ достигается при $x = 2$, наибольшее значение $y_{наиб} = 0$ достигается при $x = 0$.

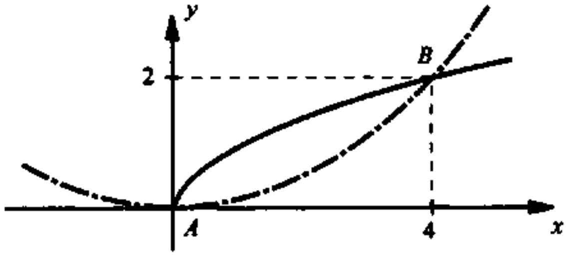
в) Наименьшее значение $y_{наим} = -4{,}5$ достигается при $x = 3$, наибольшее значение $y_{наиб} = 0$ достигается при $x = 0$.



Пример 3

Решим графически систему уравнений $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = \frac{1}{8}x^2. \end{cases}$

Построим графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = \frac{1}{8}x^2$ в одной системе координат. Видно, что графики функций пересекаются в двух точках – $A(0; 0)$ и $B(4; 2)$. Поэтому данная система уравнений имеет два решения $(0; 0)$ и $(4; 2)$.

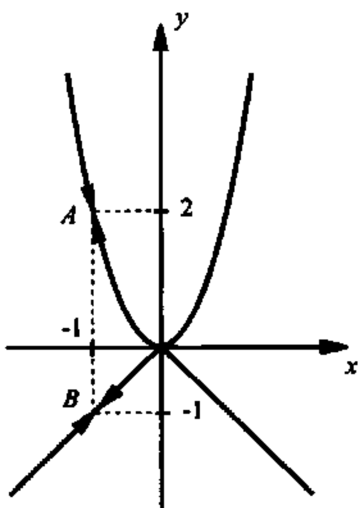


Заметим, что графический способ решения не обеспечивает высокой точности. Возможно, что система имеет решение не $(4; 2)$, а, например, $(4{,}1; 1{,}9)$. Поэтому найденные решения необходимо проверить подстановкой.

Пример 4

Построим график уравнения $\left(y - \dfrac{2x^3 + 2x^2}{x+1}\right)\left(y + |x|\right) = 0.$

Данное уравнение имеет смысл при $x + 1 \neq 0$, т. е. $x \neq -1$. Сократим дробь и запишем уравнение в виде $(y - 2x^2)(y + |x|) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем: $y - 2x^2 = 0$ (т. е. $y = 2x^2$) и $y + |x| = 0$ (тогда $y = -|x|$). Поэтому надо построить графики функций $y = 2x^2$ и $y = -|x|$ и исключить из них точки $A(-1; 2)$ и $B(-1; 1)$ с абсциссой $x = -1$.



Пример 5

Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = 3x^2$. Решим уравнение $f(x-3) = f(2x)$.

Запишем значения функции $f(x) = 3x^2$ при значениях аргумента $x - 3$ и $2x$. Получаем: $f(x-3) = 3(x-3)^2$ и $f(2x) = 3(2x)^2$. Поэтому уравнение $f(x-3) = f(2x)$ имеет вид $3(x-3)^2 = 3(2x)^2$ или $(x-3)^2 = (2x)^2$. Используя разложение на множители, решим это уравнение. Перенесем все члены в одну часть уравнения и используем формулу разности квадратов. Получаем: $(x-3)^2 - (2x)^2 = 0$, или $(x-3-2x)(x-3+2x) = 0$, или $(-3-x)(3x-3) = 0$, или $(x+3)(x-1) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Имеем два линейных уравнения: $x + 3 = 0$ (корень $x = -3$) и $x - 1 = 0$ (корень $x = 1$).

Пример 6

Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} -0{,}5x^2, \text{ если } -3 \le x \le -2; \\ x, \text{ если } -2 < x \le 1; \\ 4 - 2x, \text{ если } 1 < x \le 2. \end{cases}$

Надо:

а) вычислить $f(-3)$, $f(-2{,}5)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(1{,}5)$, $f(2)$, $f(4)$;

б) построить график функции;

в) используя график, перечислить свойства функции.

а) Точки $x = -3$, $x = -2{,}5$, $x = -2$ удовлетворяют условию $-3 \le x \le -2$. Поэтому для вычисления значений функции в этих точках используем первую строчку системы $f(x) = -0{,}5x^2$. Получаем: $f(-3) = -0{,}5\cdot(-3)^2 = -4{,}5$; $f(-2{,}5) = -0{,}5\cdot(-2{,}5)^2 = -3{,}125$; $f(-2) = -0{,}5\cdot(-2)^2 = -2$.

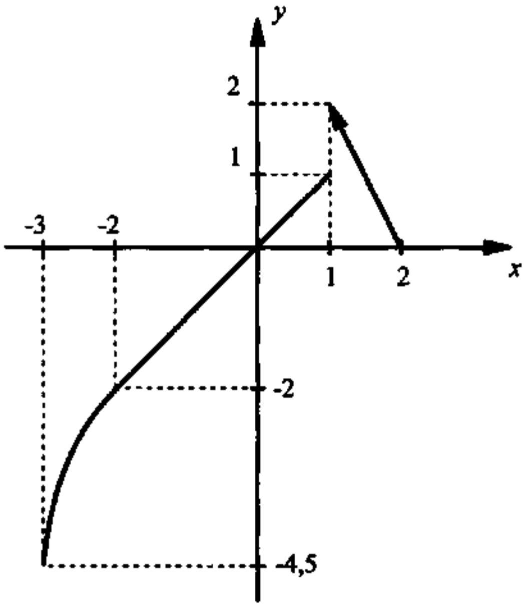
Точки $x = 0$ и $x = 1$ удовлетворяют условию $-2 < x \le 1$. Поэтому для вычисления значений функции в этих точках используем вторую строчку системы $f(x) = x$ и получаем: $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$.

Точки $x = 1{,}5$ и $x = 2$ удовлетворяют условию $1 < x \le 2$. Поэтому для вычисления значений функции в этих точках используем третью строчку системы $f(x) = 4 - 2x$ и получаем: $f(1{,}5) = 4 - 2\cdot1{,}5 = 1$ и $f(2) = 4 - 2\cdot2 = 0$.

Точка $x = 4$ не удовлетворяет ни одному из трех условий, поэтому вычислить $f(4)$ нельзя, т. е. точка $x = 4$ не принадлежит области определения функции. Поэтому задание вычисления $f(4)$ некорректно.

б) Построим график «по кусочкам». На промежутке $[-3; -2]$ строим параболу $y = -0{,}5x^2$. На промежутке $(-2; 1]$ строим прямую

$y = x$. И наконец, на промежутке $(1; 2]$ строим прямую $y = 4 - 2x$. Таким образом, график функции состоит из трех различных участков, «кусочков».



в) Перечислим свойства функции, т. е. прочитаем график.

1) Область определения функции – отрезок $[-3; 2]$.

2) Значение $y = 0$ при $x = 0$ и $x = 2$; $y > 0$ при $0 < x < 2$ и $y < 0$ при $-3 \le x < 0$.

3) Функция имеет разрыв при $x = 1$.

4) Функция возрастает на промежутке $[-3; 1]$ и убывает на промежутке $(1; 2]$.

5) Функция ограничена и снизу и сверху.

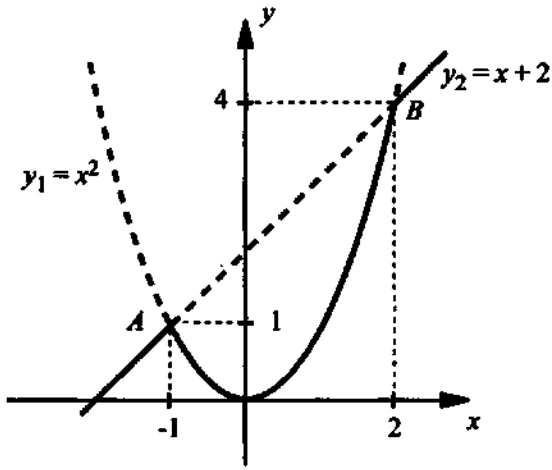
6) Наименьшее значение функции $y_{\text{наим}} = -4{,}5$ достигается при $x = -3$. Наибольшего значения функции не существует.

7) Область значений функции – промежуток $[-4{,}5; 2)$.

Пример 7

Построим график функции $y = \min(x^2; x + 2)$.

В данном примере непривычна только форма задания функции. Напомним, что запись $\min(a; b)$ означает наименьшую из величин a и b, т. е. $\min(a; b) = \begin{cases} b, \text{ если } a \ge b, \\ a, \text{ если } a < b. \end{cases}$ Построим параболу $y_1 = x^2$ и прямую $y_2 = x + 2$. Эти графики пересекаются в точках $A(-1; 1)$ и $B(2; 4)$. Видно, что на промежутках $x \in (-\infty; -1]$ и $x \in [2; \infty)$ (т. е. $x \in (-\infty; -1] \cup [2; \infty)$) величина $y_1 \geq y_2$. Поэтому наименьшие значения имеет функция y_2. Тогда выделяем участки прямой. На промежутке $x \in (-1; 2)$ величина $y_1 < y_2$, т. е. наименьшие значения имеет функция y_1. Поэтому выделяем участок параболы.



III. Контрольные вопросы

1. Как влияет коэффициент k ($k > 0$) на изменение функции $y = kx^2$?

2. Опишите свойства функции $y = kx^2$ и постройте ее график при $k > 0$.

3. Перечислите свойства квадратичной функции и постройте ее график при $k < 0$.

4. Как расположены относительно друг друга графики функций $y = f(x)$ и $y = -f(x)$?

IV. Задание на уроке

№ 17.4 (а, б); 17.12; 17.18 (а, б); 17.22 (а, г); 17.24; 17.27 (а, г); 17.30 (б); 17.32 (а, б); 17.35; 17.42; 17.52; 17.58 (а, б); 17.59; 17.63; 17.65 (в); 17.66 (а, б).

V. Задание на дом

№ 17.5 (в, г); 17.13; 17.18 (в, г); 17.22 (б, в); 17.25; 17.28 (б, в); 17.30 (г); 17.32 (в, г); 17.36; 17.43; 17.49; 17.53; 17.58 (в, г); 17.60; 17.64; 17.65 (г); 17.66 (в, г).

VI. Творческие задания

Постройте график функции:

а) $y = \min(x^2; 6 - x)$;

б) $y = \min(2x - 3; -x^2)$;

в) $y = \max(x^2; 2 - x)$;

г) $y = \max(2x - 8; -x^2)$;

д) $y = \min(x^2; |x|)$;

е) $y = \max(x^2; |x| - 2)$.

VII. Подведение итогов урока

§ 18. Функция $y = \dfrac{k}{x}$, ее свойства и график

Уроки 42–43. Обратная пропорциональность $y = \dfrac{k}{x}$

Цель: рассмотреть функцию $y = \dfrac{k}{x}$, ее свойства и график.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Перечислите свойства квадратичной функции $y = kx^2$ при $k > 0$ и постройте эскиз ее графика.

2. Решите графически систему уравнений $\begin{cases} y = 2x^2, \\ y = 6x. \end{cases}$

3. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = -3x^2$. Решите уравнение $f(x - 1) = f(5 - 2x)$.

Вариант 2

1. Перечислите свойства квадратичной функции $y = kx^2$ при $k < 0$ и постройте эскиз ее графика.

2. Решите графически систему уравнений $\begin{cases} y = -2x^2, \\ y = 4x. \end{cases}$

3. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = 2x^2$. Решите уравнение $f(x + 1) = f(7 - 2x)$.

III. Изучение нового материала

Рассмотрение темы начнем со следующего примера.

Пример 1

Пусть поезд, двигаясь со скоростью x км/ч, за y часов проехал расстояние 700 км. Тогда выполняется равенство $xy = 700$. Выразим из этого равенства переменную $y = \frac{700}{x}$. При увеличении значения x в несколько раз соответствующее значение y уменьшается во столько же раз (т. е. чем быстрее движется поезд, тем меньше ему требуется времени для прохождения этого пути). Например, при скорости $x = 35$ км/ч время движения $y = \frac{700}{35} = 20$ ч. При скорости $x = 70$ км/ч (вдвое большей) время движения $y = \frac{700}{70} = 10$ ч (вдвое меньше). Видно, что время движения y **обратно пропорционально** скорости движения x.

В этом примере переменные x и y принимали только положительные значения. В дальнейшем будут рассматриваться функции, задаваемые формулой вида $y = \frac{k}{x}$ (где k – число, не равное нулю), в которой переменные x и y могут принимать и положительные и отрицательные значения. К подобным функциям приводят многие задачи математики: площадь S прямоугольника со сторонами a и b равна $S = ab$ (откуда $b = \frac{S}{a}$), площадь S треугольника с основанием a и высотой h равна $S = \frac{ah}{2}$ (откуда $h = \frac{2S}{a}$) и физики: пройденный путь S при движении тела со скоростью v в течение времени t равен $S = vt$ (откуда $t = \frac{S}{v}$), падение напряжения U на участке цепи с сопротивлением R при протекании тока I равно $U = RI$ (откуда $I = \frac{U}{R}$) и т. д.

Обратной пропорциональностью называется функция вида $y = \frac{k}{x}$, где x – независимая переменная, k – число, не равное нулю (k – коэффициент обратной пропорциональности).

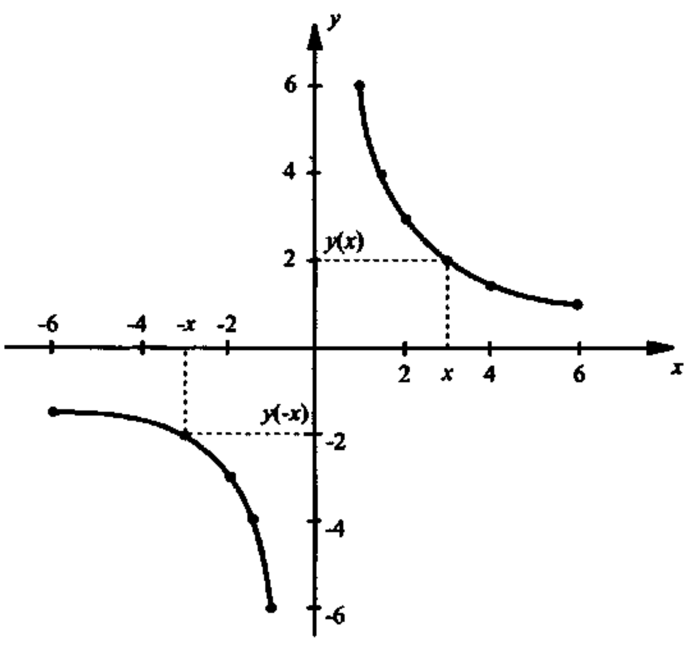
Областью определения функции $y = \frac{k}{x}$ является множество всех чисел, кроме нуля. Это следует из того, что выражение $\frac{k}{x}$ имеет смысл при всех $x \neq 0$.

Пример 2

Построим график функции $y = \frac{6}{x}$.

Предварительно составим таблицу значений этой функции.

x	−6	−3	−2	−1	1	2	3	4
y	−1,5	−2	−3	−6	6	3	2	1,5



Отметим на координатной плоскости точки, координаты которых размещены в таблице. Через эти точки проведен график данной функции (**гипербола**).

Выясним некоторые особенности графика функции.

Так как при $x = 0$ функция не определена, то на графике нет точки с абсциссой 0 (т. е. **график не пересекает ось y**). Для функции $y=\frac{6}{x}$ при любых значениях x значение y не равно нулю. Поэтому **график не пересекает ось x.**

Положительным значениям x соответствуют положительные значения y (первая координатная четверть). Отрицательным значениям x соответствуют отрицательные значения y (третья координатная четверть). Из таблицы видно, что для противоположных значений x значения y также противоположны, т. е. $y(-x) = -y(x)$. Функции, обладающие таким свойством, называются **нечетными.** Очевидно, что точки с координатами (x, y) и $(-x, -y)$ симметричны относительно начала координат.

Так как равенство $y(-x) = -y(x)$ выполняется для любых допустимых значений x, то **ветви гиперболы симметричны относительно начала координат**.

Рассмотрим ветвь графика, расположенную в первой координатной четверти. При уменьшении x знаменатель в выражении $y=\frac{6}{x}$ уменьшается. Поэтому значения y возрастают. Например, если $x = 1$, то $y = 6$; при $x = 0,1$ $y = 60$. При этом график функции приближается к оси ординат. Прямая с уравнением $x = 0$ называется **вертикальной асимптотой** графика функции $y=\frac{6}{x}$.

С увеличением x знаменатель в выражении $y=\frac{6}{x}$ возрастает. Поэтому значения y уменьшаются. Например, при $x = 1$ $y = 6$, при $x = 10$ $y = 0,6$, при $x = 100$ $y = 0,06$. Видно, что при достаточно больших значениях x значения функции y почти равны нулю. При этом график функции приближается к оси абсцисс.

Прямая с уравнением $y = 0$ называется **горизонтальной асимптотой** графика функции $y=\frac{6}{x}$.

Заметим, что такой же вид имеет график любой функции $y = \dfrac{k}{x}$ при любом значении $k > 0$. Перечислим **свойства функции** $y = \dfrac{k}{x}$ **при** значениях коэффициента обратной пропорциональности $k > 0$:

1) Область определения функции – все числа x, кроме нуля.

2) Значения $y > 0$ при $x > 0$ и $y < 0$ при $x < 0$.

3) Функция убывает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

4) Функция не ограничена.

5) Функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений.

6) Функция непрерывна на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ и имеет разрыв в точке $x = 0$.

7) Область значений функции – объединение промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

8) График функции расположен в I и III координатных четвертях.

Учитывая, что графики функций $y = f(x)$ и $y = -f(x)$ симметричны друг другу относительно оси абсцисс, перечислим **свойства функции** $y = \dfrac{k}{x}$ **при** $k < 0$:

1) Область определения функции – все числа x, кроме нуля.

2) Значения $y > 0$ при $x < 0$ и $y < 0$ при $x > 0$.

3) Функция возрастает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

4) Функция не ограничена.

5) Функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений.

6) Функция непрерывна на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ и имеет разрыв в точке $x = 0$.

7) Область значений функции – объединение промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

8) График функции расположен во II и IV координатных четвертях.

Рассмотрим наиболее типичные задачи темы.

Пример 3

Гипербола проходит через точку $A(2; -5)$. Напишем уравнение этой гиперболы.

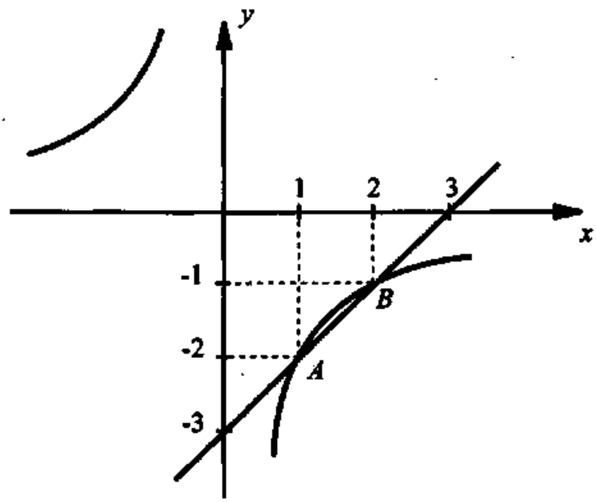
Гипербола является графиком обратной пропорциональности $y = \dfrac{k}{x}$. Так как этот график проходит через точку A, то ее координаты удовлетворяют уравнению такой зависимости. Получаем:

$-5 = \frac{k}{2}$. Из этого уравнения найдем $k = -5\cdot 2 = -10$. Следовательно, данная гипербола описывается зависимостью $y = -\frac{10}{x}$.

Пример 4

Решим уравнение $x - 3 = -\frac{2}{x}$.

Построим прямую $y = x - 3$ и гиперболу $y = -\frac{2}{x}$. Видно, что графики данных функций пересекаются в точках $A(1; -2)$ и $B(2; -1)$. Абсциссы этих точек $x = 1$ и $x = 2$ являются корнями данного уравнения. Напомним, что эти решения необходимо проверить подстановкой.

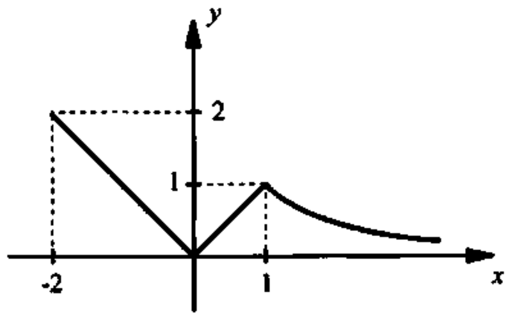


Пример 5

Построим график функции $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} |x|, \text{ если } -2 \le x \le 1, \\ \frac{1}{x}, \text{ если } x > 1 \end{cases}$

и опишем ее свойства.

На промежутке $[-2; 1]$ построим график функции $y = |x|$, а на промежутке $(1; +\infty)$ – график функции $y = \frac{1}{x}$.



Перечислим свойства этой функции:

1) Область определения – луч $[-2; +\infty)$.

2) Значение $y = 0$ при $x = 0$, $y > 0$ при $x \in [-2; 0) \cup (0; +\infty)$.

3) Функция возрастает на отрезке $[0; 1]$ и убывает на промежутках $[-2; 0]$ и $[1; +\infty)$.

4) Функция ограничена и снизу и сверху.

5) Наименьшее значение $y_{наим} = 0$ достигается при $x = 0$, и наибольшее значение $y_{наиб} = 2$ достигается при $x = -2$.

6) Функция непрерывна в области определения.

7) Область значений функции – отрезок $[0; 2]$.

Пример 6

Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = -\frac{1}{x}$. Решим уравнение $f(x+3) = 3f(5-2x)$.

Найдем значения функции при значениях аргумента $x + 3$ и $5 - 2x$. Получаем: $f(x+3) = -\frac{1}{x+3}$ и $f(5-2x) = -\frac{1}{5-2x}$. Тогда уравнение $f(x+3) = 3f(5-2x)$ имеет вид $-\frac{1}{x+3} = -\frac{3}{5-2x}$. Используя свойство пропорции, получим: $5 - 2x = 3(x + 3)$, или $5 - 2x = 3x + 9$, или $-4 = 5x$, откуда $x = -\frac{4}{5} = -0{,}8$.

Пример 7

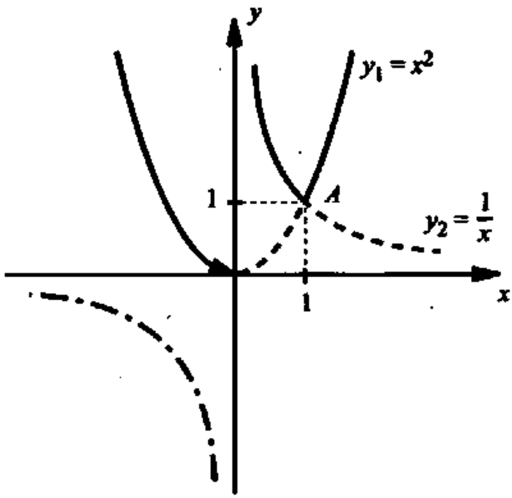
Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \frac{3}{x}$.

Докажем, что равенство $f(x+2) - f(x+3) = \frac{1}{3} f(x+2) \cdot f(x+3)$ выполняется.

Получаем $f(x+2)=\dfrac{3}{x+2}$ и $f(x+3)=\dfrac{3}{x+3}$. Вычислим левую и правую части доказываемого равенства. Найдем $f(x+2)-f(x+3)=$ $=\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{3}{x+3}=\dfrac{3}{(x+2)(x+3)}$ и $\dfrac{1}{3}f(x+2)\cdot f(x+3)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{x+2}\cdot\dfrac{3}{x+3}=$ $=\dfrac{3}{(x+2)(x+3)}$. Видно, что левая и правая части равны.

Пример 8

Построим график функции $y=\max\left(x^2;\ \dfrac{1}{x}\right)$.



Сначала построим графики функций $y_1 = x^2$ (парабола) и $y_2 = \dfrac{1}{x}$ (гипербола). Графики пересекаются в точке $A(1;\ 1)$. Видно, что на промежутках $(-\infty;\ 0)$ и $[1;\ \infty)$ значения $y_1 \geq y_2$. Поэтому на таких промежутках выделяем параболу. На промежутке $(0;\ 1)$ значения $y_2 > y_1$, и выделяем гиперболу. В точке $x = 0$ функция $y_2 = \dfrac{1}{x}$ не определена и сравнивать с ее значением любую величину некорректно. График данной функции изображен сплошной линией.

Перечислим свойства этой функции:

1) Область определения – все числа x, кроме нуля.

2) Значения $y > 0$ при всех x из области определения.

3) Функция возрастает на промежутке $[1; +\infty)$ и убывает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; 1]$.

4) Функция ограничена снизу.

5) Функция не имеет ни наименьшего, ни наибольшего значений.

6) Функция непрерывна на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ и имеет разрыв в точке $x = 0$.

7) Область значений функции – промежуток $(0; +\infty)$.

IV. Контрольные вопросы

1. Перечислите основные свойства функции $y=\dfrac{k}{x}$ при $k > 0$ и приведите ее график.

2. Перечислите основные свойства функции $y=\dfrac{k}{x}$ при $k < 0$ и приведите ее график.

V. Задание на уроке

№ 18.6; 18.10 (а, б); 18.13 (г); 18.14 (б); 18.17 (г); 18.18 (а, б); 18.20; 18.24; 18.26; 18.32 (а); 18.34; 18.37 (а, г); 18.38 (а, б).

VI. Задание на дом

№ 18.5; 18.10 (в, г); 18.13 (а); 18.14 (г); 18.17 (б); 18.18 (в, г); 18.21; 18.25; 18.27; 18.32 (б); 18.35; 18.37 (в); 18.38 (в, г).

VII. Творческие задания

Постройте график функции:

а) $y=\max\left(\dfrac{1}{x};\, x\right)$; б) $y=\min\left(x;\, \dfrac{1}{x}\right)$;

в) $y=\max\left(-\dfrac{3}{x};\, x-2\right)$; г) $y=\min\left(x-2;\, -\dfrac{3}{x}\right)$;

д) $y=\max\left(\dfrac{1}{x};\, |x|\right)$; е) $y=\min\left(|x|;\, \dfrac{1}{x}\right)$.

VIII. Подведение итогов урока

§ 19. Как построить график функции $y = f(x + l)$, если известен график функции $y = f(x)$

Уроки 44–45. Построение графика функции $y = f(x + l)$

Цель: изучить простейшее преобразование графика функции.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Перечислите основные свойства функции $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$ и приведите ее график.

2. График функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку $A(-2; 1)$. Найдите коэффициент обратной пропорциональности k.

3. Графически решите уравнение $\frac{3}{x} = x - 2$.

4. Графически решите систему уравнений $\begin{cases} y = \frac{8}{x}, \\ y = \sqrt{x}. \end{cases}$

Вариант 2

1. Перечислите основные свойства функции $y = \frac{k}{x}$ при $k < 0$ и приведите ее график.

2. График функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку $A(-1; -2)$. Найдите коэффициент обратной пропорциональности k.

3. Графически решите уравнение $-\frac{2}{x}=1-x$.

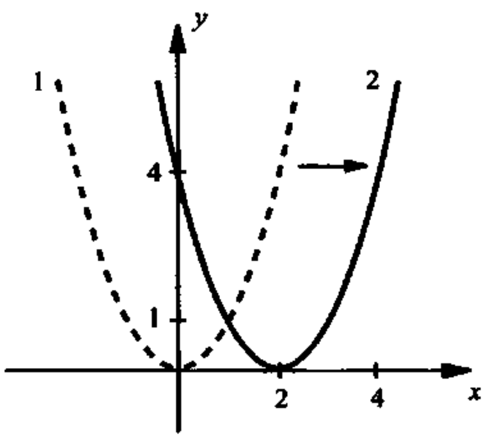
4. Графически решите систему уравнений $\begin{cases} y=\frac{1}{x}, \\ y=|x|. \end{cases}$

III. Изучение нового материала

Рассмотрим, например, функции $y = x^2$, $y = (x - 2)^2$, $y = x^2 + 3$. Очевидно, что вторая и третья функции связаны с первой. Поэтому заманчиво иметь алгоритмы, позволяющие по известному графику функции $y = x^2$ строить графики $y = (x - 2)^2$, $y = x^2 + 3$. Подобные алгоритмы называют **преобразованиями графиков**. В течение нескольких уроков мы будем изучать простейшие преобразования графиков функций. Обратите внимание на то, что изучаемые преобразования применимы для графиков любых функций.

Сначала обсудим, как построить график функции $y = f(x + l)$, если известен график функции $y = f(x)$. Рассмотрим следующий пример.

Пример 1



В одной системе координат построим графики функций $y = x^2$ и $y = (x - 2)^2$. Графиком первой функции является парабола 1 (пунктирная линия). Для функции $y = (x - 2)^2$ составим таблицу значений и построим ее график – параболу 2 (сплошная линия).

x	2	1	3	0	4
y	0	1	1	4	4

Видно, что парабола 2 сдвинута относительно параболы 1 на две единицы вправо. Соответственно, вершина параболы 2 имеет координаты (2; 0), а не (0; 0), как для параболы 1.

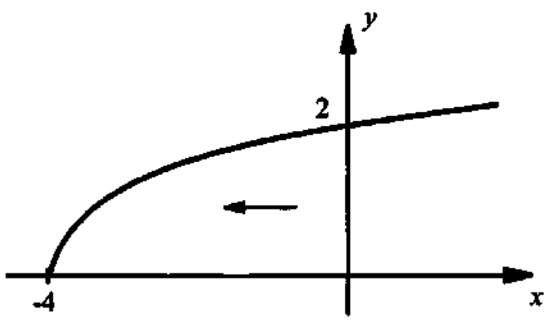
Если построим, например, график функции $y = (x + 3)^2$, то увидим, что он сдвинут относительно графика $y = x^2$ на три единицы влево.

Можно доказать для любой функции $y = f(x)$ общее утверждение: **чтобы построить график функции $y = f(x + l)$ надо сдвинуть график функции $y = f(x)$ на $|l|$ единиц влево при $l > 0$ и вправо при $l < 0$.** Запомните этот алгоритм.

Пример 2

Построим график функции $y = \sqrt{x+4}$.

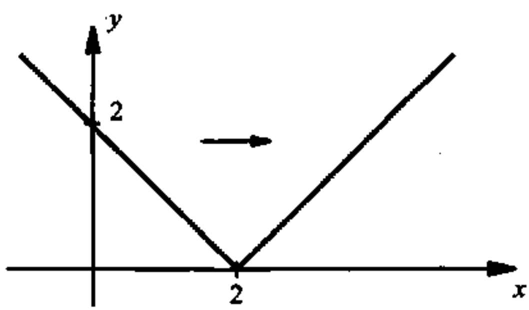
В соответствии с приведенным алгоритмом надо график функции $y = \sqrt{x}$ сдвинуть на 4 единицы влево, т. к. $l = 4 > 0$.



Пример 3

Построим график функции $y = |x - 2|$.

По данному алгоритму график функции $y = |x|$ сдвинем на 2 единицы влево, т. к. $l = -2 < 0$.



IV. Задание на уроке

№ 19.5; 19.7 (а, б); 19.8 (в, г); 19.9 (а, б); 19.11; 19.13; 19.22; 19.35 (а); 19.39 (г); 19.46 (а, в); 19.49 (а); 19.50 (в, г); 19.54 (а); 19.56; 19.58 (а, б).

V. Задание на дом

№ 19.6; 19.7 (в, г); 19.8 (а, б); 19.9 (в, г); 19.12; 19.14; 19.25; 19.36 (в); 19.39 (б); 19.46 (б, г); 19.49 (в); 19.50 (а, б); 19.54 (б); 19.57; 19.58 (в, г).

VI. Подведение итогов урока

§ 20. Как построить график функции $y = f(x) + m$, если известен график функции $y = f(x)$

Урок 46. Построение графика функции $y = f(x) + m$

Цель: продолжить изучение преобразований графика функции.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{3}{x-2}$;

б) $y = \sqrt{x+3}$;

в) $y = -|x+1|$.

2. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} y = \dfrac{1}{x+3}, \\ y = x-2 \end{cases}$?

Вариант 2

1. Постройте график функции:

а) $y = -\dfrac{2}{x+3}$;

б) $y = \sqrt{x-2}$;

в) $y = |x+3|$.

2. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} y = -\dfrac{1}{x+2}, \\ y = 3 - x? \end{cases}$

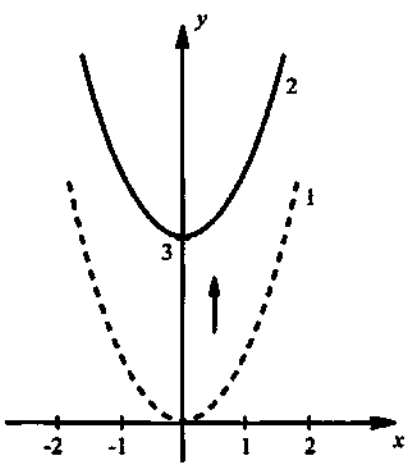
III. Изучение нового материала

Из предыдущего параграфа понятно, что преобразование графика значительно облегчает его построение. Поэтому рассмотрим следующий алгоритм – построение графика функции $y = f(x) + m$ (сначала на примере).

Пример 1

Построим графики функций $y = x^2$ и $y = x^2 + 3$. Графиком первой функции является парабола 1 (пунктирная линия). Для функции $y = x^2 + 3$ составим таблицу значений и построим ее график – параболу 2 (сплошная линия). Видно, что парабола 2 сдвинута относительно параболы 1 на три единицы вверх. Соответственно, вершина параболы 2 имеет координаты (0; 3), а не (0; 0), как для параболы 1.

x	−2	−1	0	1	2
y	7	4	3	4	7



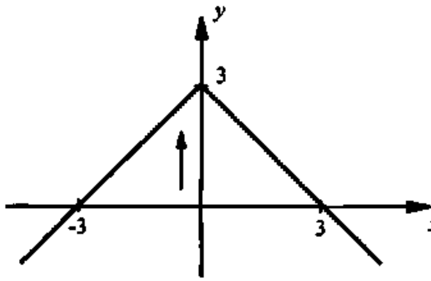
Если построим, например, график функции $y = x^2 - 2$, то увидим, что он сдвинут относительно графика $y = x^2$ на две единицы вниз.

Для любой функции $y = f(x)$ справедливо утверждение: **чтобы построить график функции $y = f(x) + m$ надо сдвинуть график функции $y = f(x)$ на $|m|$ единиц вверх при $m > 0$ и вниз при $m < 0$.** Обязательно помните этот алгоритм.

Пример 2

Построим график функции $y = -|x| + 3$.

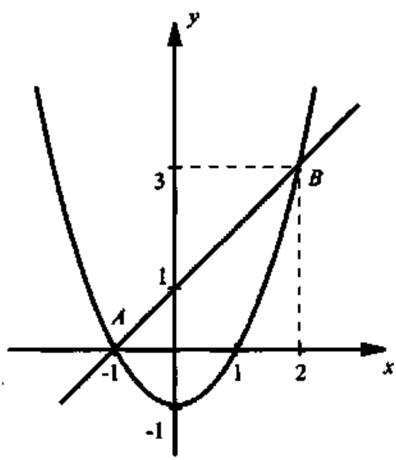
В соответствии с приведенным алгоритмом график функции $y = -|x|$ сдвинем на три единицы вверх, т. к. $m = 3 > 0$.



Пример 3

Графически решим неравенство $x^2 - 1 \le x + 1$.

Рассмотрим функцию $y_1 = x^2 - 1$. График этой функции (парабола) получается смещением графика $y = x^2$ на одну единицу вниз. Также построим график функции $y_2 = x + 1$ (прямая). Он получается смещением графика $y = x$ на одну единицу вверх. Графики функций y_1 и y_2 пересекаются в точках $A(-1; 0)$ и $B(2; 3)$.



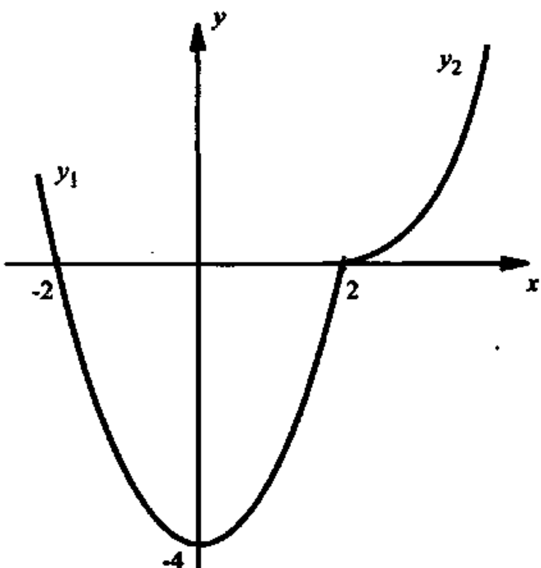
Для решения неравенства $x^2 - 1 \le x + 1$ (или $y_1 \le y_2$) надо найти такие x, при которых график первой функции расположен не выше графика второй функции.

Из рисунка видно, что такая ситуация имеет место при x, расположенных между абсциссами точек A и B, т. е. при $x \in [-1;2]$. Этот промежуток и является решением данного неравенства.

Пример 4

Построим график функции $y = x^2 - 2x - 2\sqrt{x^2 - 4x + 4}$.

Учтем, что подкоренное выражение является полным квадратом разности, и запишем функцию в виде $y = x^2 - 2x - 2\sqrt{(x-2)^2} =$ $= x^2 - 2x - 2\,|\,x-2\,|$. Далее раскроем знак модуля. При $x \ge 2$ получаем: $y = x^2 - 2x - 2(x-2) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$. При $x < 2$ имеем: $y = x^2 - 2x + 2(x-2) = x^2 - 4$. Таким образом, при $x < 2$ надо построить график функции $y_1 = x^2 - 4$ (смещение графика $y = x^2$ на четыре единицы вниз). При $x \ge 2$ строим график функции $y_2 = (x-2)^2$ (смещение графика $y = x^2$ на две единицы вправо).



Перечислим свойства данной функции:

1) Область определения функции – любые числа x.

2) Значение $y = 0$ при $x = -2$ и $x = 2$; $y > 0$ при $x < -2$ и $x > 2$; $y < 0$ при $-2 < x < 2$.

3) Функция убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.

4) Функция ограничена снизу и не ограничена сверху.

5) Наименьшее значение $y_{наим} = -4$ достигается при $x = 0$, наибольшее значение не существует.

6) Функция непрерывна в области определения.

7) Область значений функции – луч $[-4; +\infty)$.

8) Функция выпукла вниз.

IV. Задание на уроке

№ 20.5; 20.7 (а, б); 20.8 (в); 20.9 (а, б); 20.10 (в, г); 20.12 (а); 20.14 (а, б); 20.20; 20.25; 20.32 (а, г); 20.33; 20.38 (а, б); 20.41 (б); 20.42 (а).

V. Задание на дом

№ 20.6; 20.7 (в, г); 20.8 (б); 20.9 (в, г); 20.10 (а, б); 20.12 (в); 20.14 (в, г); 20.22; 20.27; 20.32 (б, в); 20.34; 20.38 (в, г); 20.40; 20.41 (а); 20.42 (б).

VI. Подведение итогов урока

§ 21. Как построить график функции $y = f(x + l) + m$, если известен график функции $y = f(x)$

Уроки 47–48. Построение графика функции $y = f(x + l) + m$

Цель: закончить рассмотрение преобразований графика функции.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Как построить график функции $y = f(x + l)$?
2. Постройте график функции:

а) $y = -|x| + 2$;

б) $y = \frac{3}{x} - 4$;

в) $y = \frac{x^3 - 4x}{x}$.

Вариант 2

1. Как построить график функции $y = f(x) + m$?
2. Постройте график функции:

а) $y = |x| - 1$;

б) $y = -\frac{2}{x} + 3$;

в) $y = \frac{3x - x^2}{x}$.

III. Изучение нового материала

Теперь необходимо обобщить результаты, полученные в § 19 и § 20. Рассмотрим построение графика функции $y = f(x + l) + m$. К этой задаче можно подойти двояко.

Первый подход. Сделать задачу **поэтапно.** Построить график функции $y = f(x)$. **Сместить его по горизонтали** на $|l|$ единиц в нужном направлении. При этом получится график функции $y = f(x + l)$. Затем этот график $y = f(x + l)$ **сместить по вертикали** на $|m|$ единиц (опять же в нужном направлении). Получим требуемый график функции $y = f(x + l) + m$.

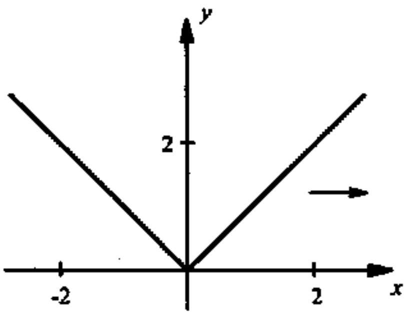
Второй подход. Такой подход подсказывают предыдущие рассуждения. Надо ввести **вспомогательную систему координат** с осями, параллельными осям основной системы (с таким же масштабом и направлениями). Начало новой системы координат должно находиться в точке $(-l; m)$. В этой вспомогательной системе координат **построить график функции** $y = f(x)$. В итоге в исходной (основной) системе координат получим требуемый график функции $y = f(x + l) + m$.

Рассмотрим эти подходы на примере.

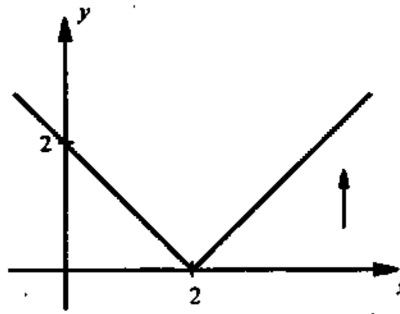
Пример 1

Двумя способами построим график функции $y = |x - 2| + 3$.

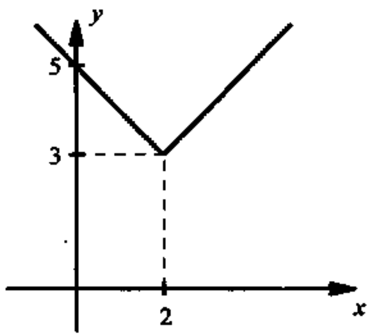
Первый подход. Сначала построим график функции $y = |x|$ (а).



а



б



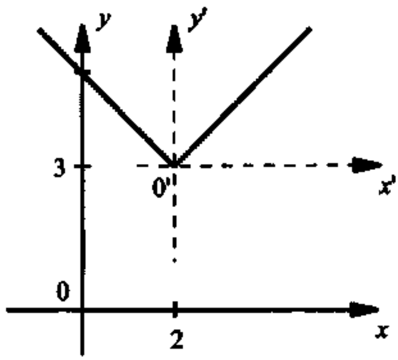
в

Затем этот график сместим на две единицы вправо, т. к. $l = -2 < 0$. Получим график функции $y = |x - 2|$ (б). Наконец, сместим этот график на три единицы вверх, т. к. $m = 3 > 0$. Получим окончательный график функции $y = |x - 2| + 3$ (в).

Второй подход. Введем вспомогательную систему координат $x'o'y'$, оси которой параллельны осям исходной системы xoy.

Начало новой системы имеет координаты $x = -l = -(-2) = 2$ и $y = m = 3$. В новой системе координат строим график функции $y' = |x'|$.

Тогда в старой (исходной) системе координат получим требуемый график функции $y = |x - 2| + 3$.



Наверное, нет смысла сопоставлять эти два подхода – они примерно равноценны и каждый может пользоваться тем, который ему более удобен. Таким образом, для построения графика функции $y = f(x + l) + m$ мы получили два алгоритма.

Алгоритм 1

1. Построить график функции $y = f(x)$.

2. Выполнить параллельный перенос графика $y = f(x)$ вдоль оси x на $|l|$ единиц влево при $l > 0$ и вправо при $l < 0$. Получим график функции $y = f(x + l)$.

3. Выполнить параллельный перенос предыдущего графика (т. е. $y = f(x + l)$) вдоль оси y на $|m|$ единиц вверх при $m > 0$ и вниз при $m < 0$. Получим график функции $y = f(x + l) + m$.

Алгоритм 2

1. Ввести вспомогательную систему координат $x'o'y'$, проведя вспомогательные оси координат $x = -l$ и $y = m$ и выбрав в качестве начала новой системы координат точку $(-l; m)$.

2. В новой системе координат построить график функции $y' = f(x')$. При этом в старой системе координат получим график функции $y = f(x + l) + m$.

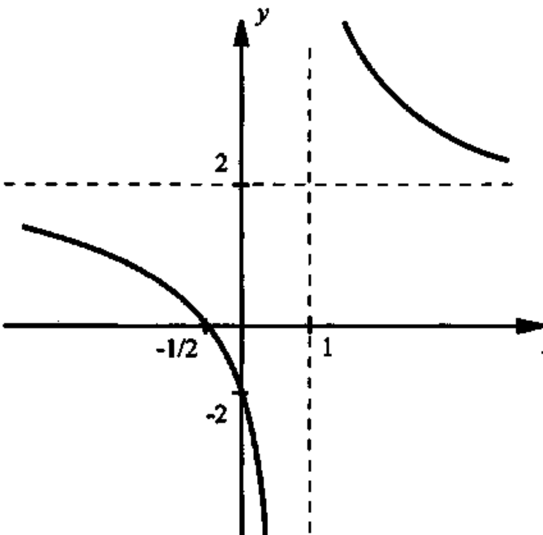
Используя любой алгоритм, решим следующие задачи.

Пример 2

Построим график дробно-линейной функции $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

Сначала в данной дроби выделим целую часть: $y = \dfrac{2x+1}{x-1} = \dfrac{2(x-1)+3}{x-1} = 2 + \dfrac{3}{x-1}$. Таким образом, надо построить гиперболу

$y=2+\frac{3}{x-1}$. Используем, например, первый алгоритм. Сначала построим график функции $y=\frac{3}{x}$. Затем сместим его на одну единицу вправо и получим график функции $y=\frac{3}{x-1}$. И наконец, этот график перенесем на две единицы вверх. В результате получим график функции $y=\frac{3}{x-1}+2$ или $y=\frac{2x+1}{x-1}$.



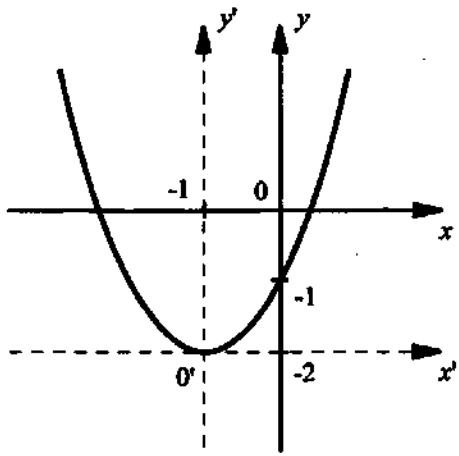
Из этого примера видно, что **графиком дробно-линейной функции** $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ (где a, b, c, d – некоторые числа, $c \neq 0$) **является гипербола**. При этом обратная пропорциональная зависимость $y=\frac{k}{x}$ – частный случай дробно-линейной функции при $a = 0$, $d = 0$. Тогда функция имеет вид $y=\frac{b}{cx}=\frac{k}{x}$ (где $k=\frac{b}{c}$).

Пример 3

Построим график функции $y=x^2+2x-1$.

В данном выражении выделим полный квадрат суммы: $y = x^2 + 2x - 1 = (x^2 + 2x + 1) - 2 = (x+1)^2 - 2$. Таким образом, надо построить график функции $y = (x + 1)^2 - 2$.

Используем второй алгоритм. Проведем прямые $x = -l = -1$ и $y = m = -2$ и введем новую систему координат $x'o'y'$ с началом в точке $(-1; 2)$. В этой новой системе координат построим график функции $y' = (x')^2$. Тогда в старой системе координат получим график функции $y = (x + 1)^2 - 2$.



Пример 4

Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ если } -2 \le x \le 1, \\ 3(x-2)^2 - 1, \text{ если } 1 < x \le 3. \end{cases}$

Построим график функции $y = f(x)$ и определим, при каких значениях a уравнение $f(x) = a$:

а) имеет один корень;

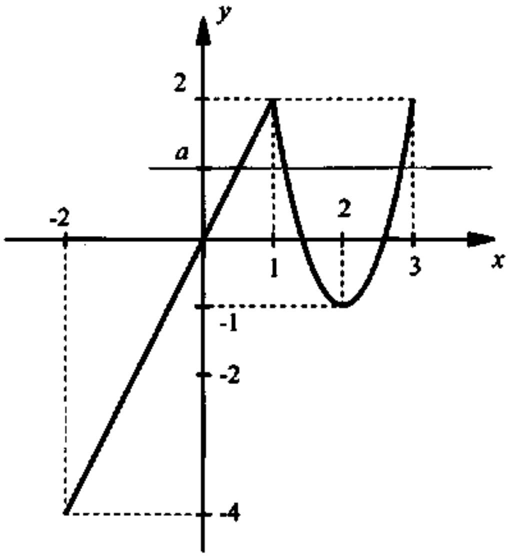
б) имеет два корня;

в) имеет три корня;

г) не имеет корней.

График прямой пропорциональной зависимости $y = 2x$ на промежутке $[-2; 1]$ построить легко.

Используя любой из алгоритмов, построим также график функции на промежутке $(1; 3]$. В результате получим график функции $y = f(x)$.



В этой же системе координат будем строить горизонтальные прямые $y = a$ для различных значений a. Теперь легко ответить на вопрос о числе корней уравнения $f(x) = a$.

а) При $a \in [-4; -1)$ уравнение имеет один корень.

б) При $a = -1$ и $a = 2$ уравнение имеет два корня.

в) При $a \in (-1; 2)$ уравнение имеет три корня.

г) При $a \in (-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$ уравнение не имеет корней.

В заключении подведем **основные итоги** изучения §§ 19–21. Зная график функции $y = f(x)$, мы имеем **алгоритмы построения** графиков функций:

1) $y = -f(x)$;
2) $y = f(x + l)$;
3) $y = f(x) + m$;
4) $y = f(x + l) + m$.

Эти алгоритмы необходимо твердо знать и помнить, т. к. они пригодны для любых функций, включая те, которые изучены, будут изучаться в дальнейшем и которые в школе не изучаются.

IV. Контрольные вопросы

1. Как построить график функции $y = -f(x)$?
2. Алгоритм построения графика функции $y = f(x + l)$.
3. Как построить график функции $y = f(x) + m$?
4. Два алгоритма построения графика функции $y = f(x + l) + m$.

V. Задание на уроке

№ 21.3 (а, б); 21.4 (в, г); 21.5; 21.12 (а, б); 21.13 (б, в); 21.16; 21.18; 21.24; 21.25 (а); 21.26 (а, б); 21.28 (в, г).

VI. Задание на дом

№ 21.3 (в, г); 21.4 (а, б); 21.6; 21.12 (в, г); 21.14 (а, б); 21.17; 21.23; 21.25 (б); 21.26 (в, г); 21.28 (а, б).

VII. Подведение итогов урока

§ 22. Функция $y = ax^2 + bx + c$, ее свойства и график

Уроки 49–51. Квадратный трехчлен

Цель: изучить свойства квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

Постройте график функции:

а) $y = -\sqrt{x+2} + 3$;

б) $y = |x - 1| - 2$;

в) $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

Вариант 2

Постройте график функции:

а) $y = \sqrt{x-1} + 2$;

б) $y = -|x + 2| - 1$;

в) $y = \dfrac{3x+5}{x+2}$.

III. Изучение нового материала

Рассмотрим многочлен второй стебпени $ax^2 + bx + c$, где a, b, c – числа (коэффициенты), причем обязательно $a \neq 0$. Его называют **квадратным трехчленом.** При этом одночлен ax^2 называют **старшим членом** квадратного трехчлена, а коэффициент a – **старшим коэффициентом.** Члены bx или (и) c могут в квадратный трехчлен и не входить. Например, многочлены $2x^2 - 3x$, $5x^2 + 1$, $-7x^2$ также квадратные трехчлены.

Функцию $y = ax^2 + bx + c$ (где a, b, c – коэффициенты и $a \neq 0$) называют **квадратичной функцией.** В предыдущем параграфе мы видели, что графиком такой функции является **парабола**, которая получается параллельным переносом параболы $y = ax^2$. Однако это было показано только для конкретного примера. Докажем такое утверждение в общем случае.

Теорема. Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола, получаемая параллельным переносом параболы $y = ax^2$.

В квадратном трехчлене $ax^2 + bx + c$ выделим полный квадрат. Получаем: $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left(\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c=$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Итак, квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ приведен к виду $a(x+l)^2+m$, где $l=\frac{b}{2a}$, $m=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

Чтобы построить график функции $y = (x + l)^2 + m$, надо параболу $y = ax^2$ перенести параллельно так, чтобы вершина параболы оказалась в точке $(-l; m)$. Теорема доказана.

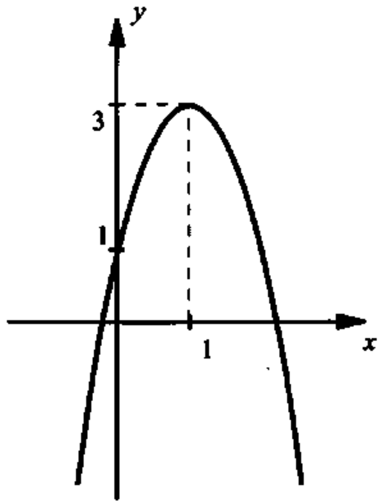
При доказательстве были получены важные результаты:

1) Вершина параболы $y = ax^2 + bx + c$ имеет координаты $x_0=-\frac{b}{2a}$, $y_0 = y(x_0)$.

2) Осью симметрии параболы служит прямая $x = x_0$.

Пример 1

Построим график функции $y = -2x^2 + 4x + 1$.



В этом случае $a = -2$ и $b = 4$. Найдем координаты вершины параболы: $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2\cdot(-2)} = 1$ и $y_0 = y(x_0) = -2\cdot 1^2 + 4\cdot 1 + 1 = 3$. Ось симметрии параболы $x = x_0 = 1$. Парабола $y = -2x^2 + 4x + 1$ получается параллельным переносом параболы $y = -2x^2$. Ветви параболы $y = -2x^2$ направлены вниз, т. к. коэффициент при x^2 отрицательный.

При решении этой задачи фактически был получен **алгоритм построения параболы** $y = ax^2 + bx + c$:

1) Найти координаты вершины параболы (x_0, y_0) и построить ее.

2) Определить уравнение оси симметрии параболы $x = x_0$ и построить ось.

3) Осуществить параллельный перенос параболы $y = ax^2$ так, чтобы ее вершина оказалась в точке (x_0, y_0). При этом для $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, для $a < 0$ – вниз.

Рассмотрим другие задачи, связанные с квадратичной функцией.

Пример 2

Область значений функции $y = 3x^2 + 12x + c$ – луч $[-8; +\infty)$. Найдем c.

График данной функции – парабола, направленная ветвями вверх. Поэтому область значений функции – луч $[y_0; +\infty)$, где y_0 – ордината вершины параболы. Найдем координаты вершины. В нашем случае $a = 3$ и $b = 12$. Тогда $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2\cdot 3} = -2$ и

$y_0 = y(x_0) = 3\cdot(-2)^2 + 12\cdot(-2) + c = -12 + c$. Для нахождения c получаем линейное уравнение $-12 + c = -8$, откуда $c = 4$.

Пример 3

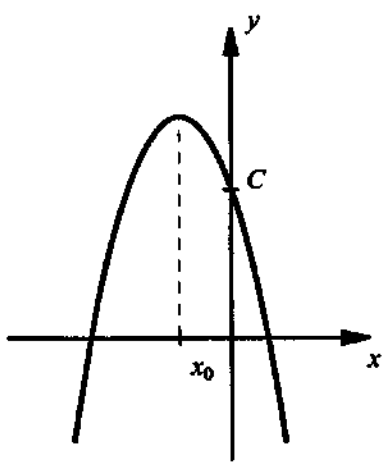
Парабола $y = ax^2 + bx + c$ пересекает оси координат в точках (2; 0), (−1; 0) и (0; −4). Найдем коэффициенты a, b и c.

Так как парабола проходит через три заданные точки, то их координаты удовлетворяют уравнению параболы. Получаем систему линейных уравнений $\begin{cases} 0 = a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c, \\ 0 = a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c, \\ -4 = a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c \end{cases}$ или $\begin{cases} 0 = 4a + 2b + c, \\ 0 = a - b + c, \\ -4 = c. \end{cases}$

Подставим значение $c = -4$ в первые два уравнения. Получим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases} 0 = 4a + 2b - 4, \\ 0 = a - b - 4 \end{cases}$ или $\begin{cases} 2 = 2a + b, \\ 4 = a - b. \end{cases}$ Сложим уравнения системы: $6 = 3a$, откуда $a = 2$. Из второго уравнения системы найдем $b = a - 4 = 2 - 4 = -2$. Итак, $a = 2$, $b = -2$ и $c = -4$.

Пример 4

На рисунке представлен график функции $y = ax^2 + bx + c$. Определим знаки коэффициентов a, b и c.



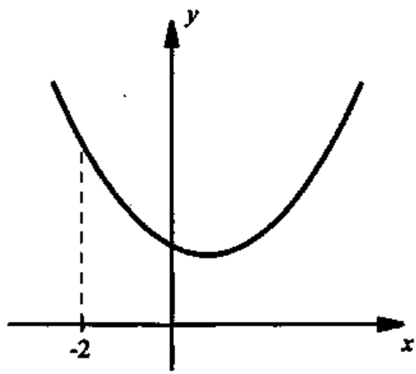
Так как ветви параболы направлены вниз, то $a < 0$. При $x = 0$ значение функции $y = c$. Из рисунка видно, что график пересекает ось ординат в точке $y = c > 0$. Поэтому $c > 0$.

Далее следим за абсциссой вершины параболы $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$. Из рисунка видно, что $x_0 < 0$ или $-\dfrac{b}{2a} < 0$. Очевидно, что $\dfrac{b}{2a} > 0$. Так как число $2a$ отрицательное, то b должно быть также число отрицательным, т. е. $b < 0$.

Итак, получили: $a < 0$, $b < 0$ и $c > 0$.

Пример 5

На рисунке приведена парабола $y = ax^2 + bx + c$. Определим знак выражения $4a - 2b + c$.



Прежде всего надо понять смысл выражения $4a - 2b + c$. После некоторых размышлений понимаем, что это выражение – значение функции при $x = -2$. Действительно, $y(-2) = a\cdot(-2)^2 + b\cdot(-2) + c = 4a - 2b + c$. Из рисунка видно, что при всех x значения функции положительны. Поэтому выражение $4a - 2b + c > 0$.

IV. Контрольные вопросы

1. Какая кривая является графиком функции $y = ax^2 + bx + c$?
2. Координаты вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$.
3. Ось симметрии параболы $y = ax^2 + bx + c$.
4. Чем определяется направление ветвей параболы $y = ax^2 + bx + c$?

V. Задание на уроке

№ 22.6 (а, б); 22.10 (в, г); 22.12 (б); 22.13; 22.21 (в, г); 22.24; 22.28 (а); 22.34; 22.39; 22.45; 22.48; 22.54.

VI. Задание на дом

№ 22.6 (в, г); 22.10 (а, б); 22.12 (г); 22.14; 22.21 (а, б); 22.25; 22.29 (б); 22.35; 22.38; 22.46; 22.50; 22.55.

VII. Подведение итогов урока

§ 23. Графическое решение квадратных уравнений

Урок 52. Решение уравнений с помощью графиков

Цель: использовать графики для решения уравнений.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Как найти координаты вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$?

2. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точки (1; 4), (0; 2) и (−2; 16). Найдите коэффициенты a, b и c.

3. Постройте график функции $y = 2x^2 - 4x + 5$.

Вариант 2

1. Как определить уравнение оси симметрии параболы $y = ax^2 + bx + c$?

2. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точки (1; −2), (0; −1) и (−2; 13). Найдите коэффициенты a, b и c.

3. Постройте график функции $y = 2x^2 + 4x + 5$.

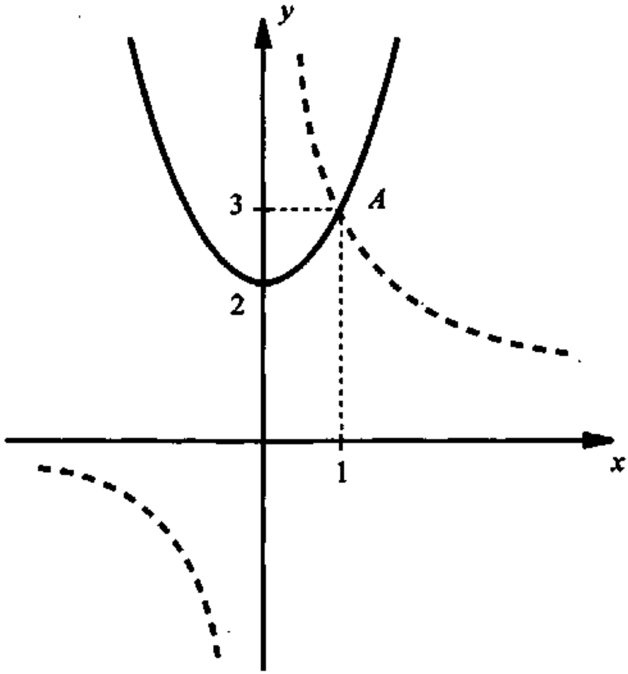
III. Изучение нового материала

Мы уже неоднократно использовали графики для решения или исследования уравнений. Причем с помощью графиков удавалось решать такие уравнения, которые другими способами мы решать не умеем.

Пример 1

Решим уравнение $x^2 + 2 = \frac{3}{x}$.

В одной координатной плоскости построим графики функций $y_1 = x^2 + 2$ и $y_2 = \frac{3}{x}$. Видно, что эти графики пересекаются в единственной точке $A(1; 3)$. Абсцисса точки пересечения A есть то значение переменной x, при котором значения функций y_1 и y_2 равны (или выражения $x^2 + 2$ и $\frac{3}{x}$ принимают равные значения). Итак, данное уравнение $x^2+2=\frac{3}{x}$ имеет единственный корень $x = 1$.

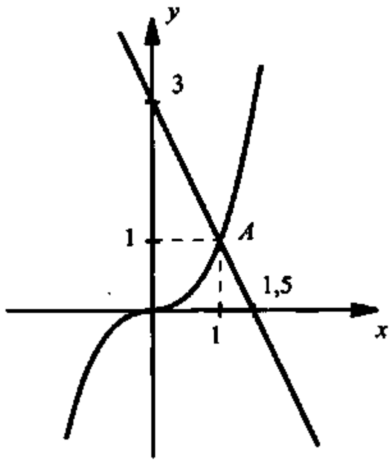


Заметим, что для нахождения корня данного уравнения могут быть рассмотрены графики и других функций.

Учтем, что в уравнении $x^2+2=\frac{3}{x}$ величина $x \neq 0$. Умножим все члены уравнения на x и получим уравнение: $x^3 + 2x = 3$ или $x^3 = 3 - 2x$.

Построим графики функций $y_1 = x^3$ и $y_2 = 3 - 2x$. Видно, что графики этих функций пересекаются в единственной точке $A(1; 1)$. При $x = 1$ значения функций y_1 и y_2 равны (или выражения x^3 и $3 - 2x$ принимают равные значения).

Итак, $x = 1$ – единственный корень данного уравнения.



Заметим, что кубическое уравнение $x^3 = 3 - 2x$ аналитически мы решить не можем (решение некоторых кубических уравнений будет рассматриваться только в 9-м классе). Поэтому графический способ решения является единственно возможным в данной ситуации.

Пример 2

При каких значениях a уравнение $x^2 - 4x + 3 = a$:

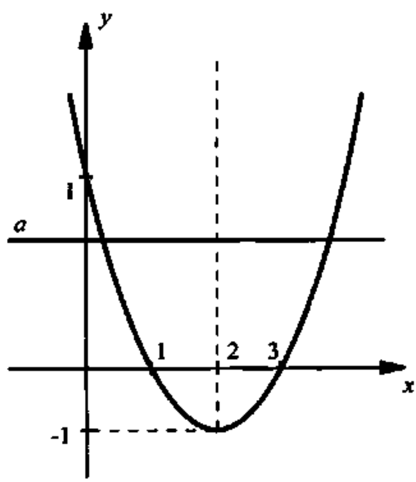
а) не имеет корней;

б) имеет один корень;

в) имеет два корня;

г) имеет два положительных корня;

д) имеет два корня разных знаков?



Построим график функции $y = x^2 - 4x + 3$. Вершина параболы имеет координаты $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2$ и $y_0 = y(x_0) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$. Ось симметрии параболы имеет уравнение $x = 2$.

В той же системе координат будем строить прямые $y = a$ при различных значениях a.

Теперь легко ответить на все поставленные вопросы.

а) Уравнение не имеет корней при $a < -1$.

б) Уравнение имеет один корень при $a = -1$.

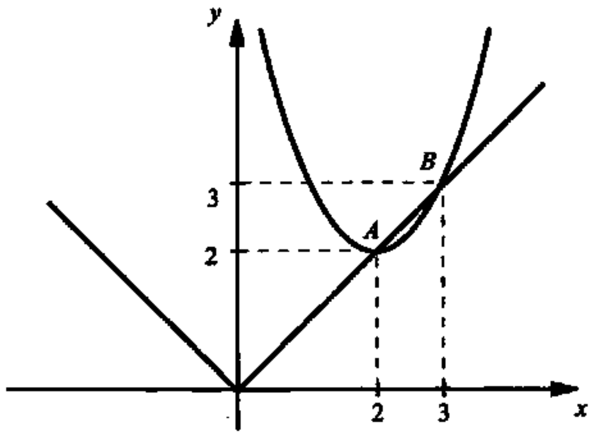
в) Уравнение имеет два корня при $a > -1$.

г) Уравнение имеет два положительных корня при $-1 < a < 1$.

д) Уравнение имеет два корня разных знаков при $a > 1$.

Пример 3

Решим уравнение $x^2 - 4x + 6 = |x|$.



Построим графики функций $y_1 = x^2 - 4x + 6 = (x-2)^2 + 2$ и $y_2 = |x|$. Видно, что графики пересекаются в двух точках $A(2; 2)$ и $B(3; 3)$. Поэтому данное уравнение имеет два корня $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$.

IV. Задание на уроке

№ 23.3 (а, б); 23.7 (в, г); 23.8 (а); 23.9; 23.17; 23.20; 23.22.

V. Задание на дом

№ 23.3 (в, г); 23.7 (а, б); 23.8 (г); 23.10; 23.18; 23.19; 23.23; 23.24.

VI. Подведение итогов урока

Уроки 53–54. Контрольная работа № 4

по теме «Квадратичная функция. Функция $y = \dfrac{k}{x}$»

Цель: проверка знаний учащихся с использованием разноуровневых вариантов.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в 6 вариантах различной сложности (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – сложнее, варианты 5, 6 – самые сложные). При этом сложность вариантов нарастает не очень резко. Каждый вариант содержит 6 задач примерно одинаковой сложности (может быть, несколько сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач. Одна задача является резервной (или запасной) и дает некоторую возможность выбора учащимся. При таких же критериях оценки в случае вариантов 3, 4 дается дополнительно 0,5 балла и в случае вариантов 5, 6 – дополнительно 1,0 балла (учитывая более высокую сложность этих вариантов). Поэтому в случае вариантов 5, 6 оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач.

Выбор вариантов может быть сделан учителем или учащимся (при этом число экземпляров вариантов должно быть достаточным). Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

III. Варианты работы

Вариант 1

1. Для квадратичной функции $y = 3x^2 + 5x - 7$ найти $y(-2)$.

2. Дана функция $y = \dfrac{3}{x-2} + 4$. Найдите $y(5)$.

3. Найти координаты вершины параболы $y = 2(x - 3)^2 + 1$.

4. Напишите уравнение оси симметрии параболы $y = x^2 + 6x - 3$.

5. Запишите уравнение параболы $y = x^2 + px + q$, вершина которой находится в точке $A(-4; -9)$.

6. Постройте график функции $y = (x - 2)^2 - 1$.

Вариант 2

1. Для квадратичной функции $y = -2x^2 + 7x - 3$ найти $y(-3)$.

2. Дана функция $y = \dfrac{5}{x-1} + 2$. Найдите $y(6)$.

3. Найти координаты вершины параболы $y = -3(x-2)^2 - 4$.

4. Напишите уравнение оси симметрии параболы $y = x^2 + 4x - 5$.

5. Запишите уравнение параболы $y = x^2 + px + q$, вершина которой находится в точке $A(-3; -4)$.

6. Постройте график функции $y = (x+1)^2 - 2$.

Вариант 3

1. Дана функция $y(x) = 2x^2 - 3x + 4$. Найдите $y(2-x)$.

2. Дана функция $y(x) = \dfrac{2x+1}{3x-4}$. Найдите $y(x+1)$.

3. Найдите координаты вершины параболы $y = 2x^2 + 4x - 5$.

4. Графически решите уравнение $x^2 = 3x - 2$.

5. Функция $y = -3x^2 + bx + 7$ принимает наибольшее значение в точке $x_0 = -2$. Найдите это значение.

6. Постройте график функции $y = (x+1)(x-3)$.

Вариант 4

1. Дана функция $y(x) = -3x^2 - 4x + 5$. Найдите $y(3-x)$.

2. Дана функция $y(x) = \dfrac{3x-1}{2x+1}$. Найдите $y(x-1)$.

3. Найдите координаты вершины параболы $y = -3x^2 - 6x + 7$.

4. Графически решите уравнение $x^2 = x + 2$.

5. Функция $y = 2x^2 - bx + 5$ принимает наименьшее значение в точке $x_0 = -3$. Найдите это значение.

6. Постройте график функции $y = (x-1)(3-x)$.

Вариант 5

1. Дана функция $y(x) = -3x^2 + 4x - 2$. Найдите $y(1-x)$.

2. Найдите точки пересечения графика функции $y = \dfrac{2x-1}{x+1} + 3$ с осями координат.

3. Число 80 представьте в виде суммы двух чисел, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

4. В каких точках пересекаются графики функций $y = x^2 - 3x + 4$ и $y = 5x - 3$?

5. Постройте график функции $y = (x+3)|x-1|$.

6. Постройте график функции $y = \frac{2x+3}{x+1}$.

Вариант 6

1. Дана функция $y(x) = 2x^2 - 7x + 1$. Найдите $y(2x - 1)$.

2. Найдите точки пересечения графика функции $y = \frac{3x+1}{x-1} - 1$ с осями координат.

3. Число 60 представьте в виде суммы двух чисел, чтобы их произведение было наибольшим.

4. В каких точках пересекаются графики функций $y = x^2 - 2x + 5$ и $y = 3x + 1$?

5. Постройте график функции $y = |x + 3|(x - 1)$.

6. Постройте график функции $y = \frac{2x-4}{x-1}$.

Урок 55. Итоги контрольной работы

Цели: сообщить результаты работы, рассмотреть наиболее типичные ошибки, разобрать трудные задачи.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Итоги контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения.

Данные о результатах работы удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи / Итоги	1	2	3	...	6
+	5				
±	1				
—	1				
Ø	1				

Обозначения:

\+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;

± – число решивших задачу со значительными ошибками;

— – число не решивших задачу;

Ø – число не решавших задачу.

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.

3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, решившими эту задачу).

4. Разбор всей контрольной работы (вывесить на стенде ответы к заданиям вариантов и разбор наиболее трудных вариантов).

III. Ответы и решения

Ответы

Вариант 1

1. *Ответ*: -5.
2. *Ответ*: 5.
3. *Ответ*: $x_0 = 3$ $y_0 = 1$.
4. *Ответ*: $x = -3$.
5. *Ответ*: $y = x^2 + 8x + 7$.

Вариант 2

1. *Ответ*: -42.
2. *Ответ*: 3.
3. *Ответ*: $x_0 = 2$ $y_0 = -4$.
4. *Ответ*: $x = -2$.
5. *Ответ*: $y = x^2 + 6x + 5$.

Вариант 3

1. *Ответ*: $y = 2x^2 - 5x + 6$.
2. *Ответ*: $\dfrac{2x+3}{3x-1}$.
3. *Ответ*: $x_0 = -1$ $y_0 = -7$.
4. *Ответ*: $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$.
5. *Ответ*: 19.

Вариант 4

1. *Ответ*: $y = -3x^2 + 22x - 34$.
2. *Ответ*: $\dfrac{3x-4}{2x-1}$.
3. *Ответ*: $x_0 = -1$ $y_0 = 10$.
4. *Ответ*: $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$.
5. *Ответ*: -13.

Решения

Вариант 5

1. Для функции $y(x) = -3x^2 + 4x - 2$ подставим значение аргумента и получим: $y(1-x) = -3(1-x)^2 + 4(1-x) - 2 = -3x^2 + 2x - 1$.

Ответ: $-3x^2 + 2x - 1$.

2. Запишем функцию $y=\frac{2x-1}{x+1}+3$ в виде $y=\frac{2x-1+3x+3}{x+1}=\frac{5x+2}{x+1}$. Если график пересекает ось ординат, то координата $x = 0$. Подставив это значение, получаем $y=\frac{5\cdot 0+2}{0+1}=2$. Если график пересекает ось абсцисс, то координата $y = 0$. Получаем уравнение $0=\frac{5x+2}{x+1}$ или $0 = 5x + 2$, откуда $x=-\frac{2}{5}$. Итак, график пересекает оси координат в точках (0; 2) и $\left(-\frac{2}{5}; 0\right)$.

Ответ: (0; 2) и $\left(-\frac{2}{5}; 0\right)$.

3. Пусть первое число равно x, тогда второе число $80 - x$. Найдем сумму квадратов этих чисел $y=x^2+(80-x)^2=2x^2-160x+6400$. Функция $y = 2x^2 - 160x + 6400$ достигает наименьшего значения при $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-160}{4}=40$. Итак, если каждое из чисел равно 40, то сумма квадратов таких чисел будет наименьшей.

Ответ: 40 и 40.

4. Координаты точки пересечения графиков функций $y = x^2 - 3x + 4$ и $y = 5x - 3$ удовлетворяют уравнениям этих функций. Приравняв правые части, получаем уравнение $x^2 - 3x + 4 = 5x - 3$ или $x^2 - 8x + 7 = 0$. Разложим левую часть на множители: $(x^2 - x) + (-7x + 7) = 0$, или $x(x - 1) - 7(x - 1) = 0$, или $(x - 1)(x - 7) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Находим корни уравнения $x_1 = 1$ и $x_2 = 7$.

Подставив эти значения в равенство $y = 5x - 3$, найдем $y_1 = 5 \cdot 1 - 3 = 2$ и $y_2 = 5 \cdot 7 - 3 = 32$.

Итак, точки пересечения графиков данных функций (1; 2) и (7; 32).

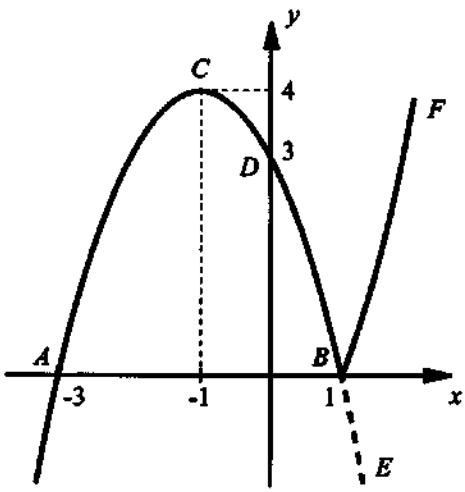
Ответ: (1; 2) и (7; 32).

5. Построим график функции $y = (x + 3)|x - 1|$. Для этого раскроем знак модуля.

а) Если $x - 1 < 0$ (т. е. $x < 1$), то функция имеет вид $y = (x + 3)(1 - x)$. Найдем точки пересечения параболы с осью абсцисс. Получаем уравнение $0 = (x + 3)(1 - x)$, корни которого $x_1 = -3$ и $x_2 = 1$ (точки

A и B). Абсцисса вершины параболы $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-3+1}{2} = -1$, ордината $y_0 = y(-1) = (-1 + 3)(1 + 1) = 4$. Строим вершину параболы – точку C. Найдем точку пересечения параболы с осью ординат. Положим $x = 0$ и получим $y(0) = (0 + 3)(1 - 0) = 3$ (точка D). Через точки A, B, C, D проводим параболу и выбираем ту ее часть, для которой $x < 1$.

б) Если $x - 1 \geq 0$ (т. е. $x \geq 1$), то функция имеет вид $y = (x + 3)(x - 1)$. Запишем ее в виде $y = -(x + 3)(1 - x)$. Сравнивая ее с функцией в пункте а) $y = (x + 3)(1 - x)$, видим, что их значения противоположны по знаку. Поэтому при $x \geq 1$ участок BE уже построенной в пункте а) параболы зеркально отражаем относительно оси абсцисс и получаем кривую BF.

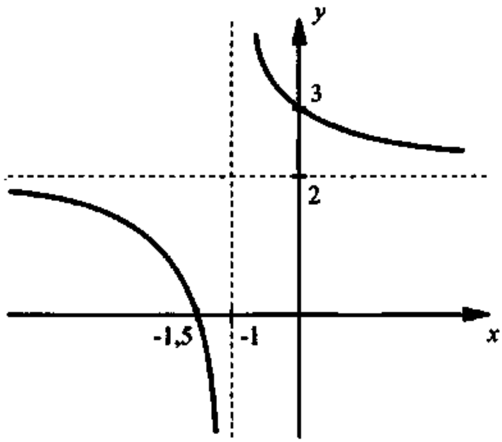


Итак, график функции построен.

Ответ: см. график.

6. В данной дроби выделим целую часть $y = \frac{2x+3}{x+1} = \frac{(2x+2)+1}{x+1} =$

$= \frac{2(x+1)+1}{x+1} = 2 + \frac{1}{x+1}$. Таким образом, надо построить график функции $y = \frac{1}{x+1} + 2$. Он получается смещением графика $y = \frac{1}{x}$ на одну единицу влево и на две единицы вверх. Легко найти точки пересечения графика функции с осями координат. При $x = 0$ получаем: $y = \frac{2\cdot 0+3}{0+1} = 3$ (пересечение с осью ординат). При $y = 0$ имеем уравнение $0 = \frac{2x+3}{x+1}$ или $0 = 2x + 3$, откуда $x = -\frac{3}{2} = -1{,}5$ (пересечение с осью абсцисс).



Ответ: см. график.

Вариант 6

1. Для функции $y(x) = 2x^2 - 7x + 1$ подставим значение аргумента и получим: $y(2x-1) = 2(2x-1)^2 - 7(2x-1) + 1 = 8x^2 - 22x + 10$.

Ответ: $8x^2 - 22x + 10$.

2. Запишем функцию $y = \frac{3x+1}{x-1} - 1$ в виде $y = \frac{3x+1-x+1}{x-1} = \frac{2x+2}{x-1}$. Если график пересекает ось ординат, то координата $x = 0$. Подставив это значение, получаем $y = \frac{2\cdot 0+2}{0-1} = -2$. Если график пересекает ось абсцисс, то координата $y = 0$. Получаем уравнение $0 = \frac{2x+2}{x-1}$ или $0 = 2x + 2$, откуда $x = -1$. Итак, график пересекает оси координат в точках $(0; -2)$ и $(-1; 0)$.

Ответ: $(0; -2)$ и $(-1; 0)$.

3. Пусть первое число равно x, тогда второе число $60 - x$. Найдем произведение этих чисел $y = x(60 - x) = -x^2 + 60x$. Функция

$y = -x^2 + 60x$ достигает наибольшего значения при $x = -\frac{b}{2a} =$

$= -\frac{60}{2\cdot(-1)} = 30.$

Итак, если каждое из чисел равно 30, то произведение таких чисел будет наибольшим.

Ответ: 30 и 30.

4. Координаты точки пересечения графиков функций $y = x^2 - 2x + 5$ и $y = 3x + 1$ удовлетворяют уравнениям этих функций. Приравняв правые части, получаем уравнение $x^2 - 2x + 5 = 3x + 1$ или $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Разложим левую часть на множители: $(x^2 - x) + (-4x + 4) = 0$, или $x(x - 1) - 4(x - 1) = 0$, или $(x - 1)(x - 4) = 0$.

Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Находим корни уравнения $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$. Подставив эти значения в равенство $y = 3x + 1$, найдем $y_1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$ и $y_2 = 3 \cdot 4 + + 1 = 13$. Итак, точки пересечения графиков данных функций (1; 4) и (4; 13).

Ответ: (1; 4) и (4; 13).

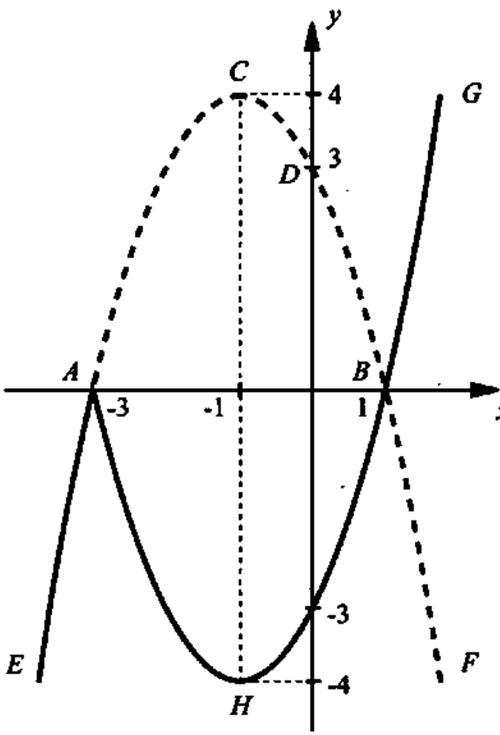
5. Построим график функции $y = |x + 3|(x - 1)$. Для этого раскроем знак модуля.

а) Если $x + 3 < 0$ (т. е. $x < -3$), то функция имеет вид $y = -(x + 3)(x - 1)$. Найдем точки пересечения параболы с осью абсцисс. Получаем уравнение $0 = -(x + 3)(x - 1)$, корни которого $x_1 = -3$ и $x_2 = 1$ (точки *A* и *B*).

Абсцисса вершины параболы $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-3+1}{2} = -1$, ордината $y_0 = y(-1) = -(-1 + 3)(-1 - 1) = 4$. Строим вершину параболы – точку *C*. Найдем точку пересечения параболы с осью ординат. Положим $x = 0$ и получим $y(0) = -(0 + 3)(0 - 1) = 3$ (точка *D*). Через точки *A*, *B*, *C*, *D* проводим параболу и выбираем ту ее часть, для которой $x < -3$ (часть *AE*).

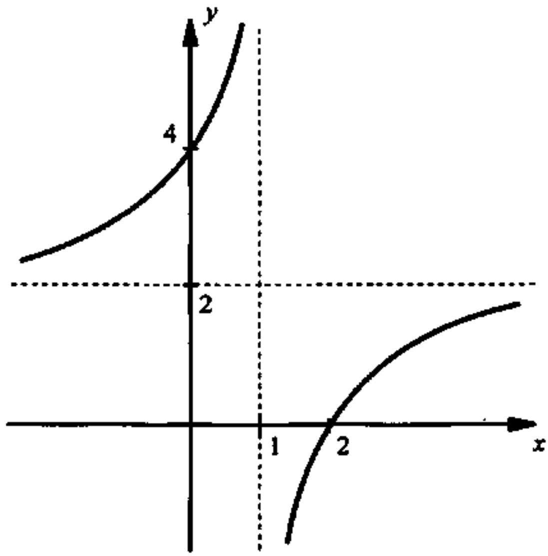
б) Если $x + 3 \geq 0$ (т. е. $x \geq -3$), то функция имеет вид $y = (x + 3)(x - 1)$. Сравнивая ее с функцией в пункте а) $y = -(x + 3)(x - 1)$, видим, что их значения противоположны по знаку.

Поэтому при $x \geq -3$ участок *ACDBF* уже построенной в пункте а) параболы зеркально отражаем относительно оси абсцисс и получаем кривую *AHBG*.



Итак, график функции построен.
Ответ: см. график.

6. В данной дроби выделим целую часть $y = \frac{2x-4}{x-1} = \frac{(2x-2)-2}{x-1} =$ $= \frac{2(x-1)-2}{x-1} = 2 - \frac{2}{x-1}$. Таким образом, надо построить график функции $y = -\frac{2}{x-1} + 2$. Он получается смещением графика $y = -\frac{2}{x}$ на одну единицу вправо и на две единицы вверх. Легко найти точки пересечения графика функции с осями координат. При $x = 0$ получаем: $y = \frac{2 \cdot 0 - 4}{0-1} = 4$ (пересечение с осью ординат). При $y = 0$ имеем уравнение $0 = \frac{2x-4}{x-1}$ или $0 = 2x - 4$, откуда $x = 2$ (пересечение с осью абсцисс).



Ответ: см. график.

Уроки № 56–57. Зачетная работа

по теме «Квадратичная функция. Функция $y = \dfrac{k}{x}$»

***Цель*: проверка знаний учащихся по вариантам одинаковой сложности.**

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Характеристика зачетной работы

Работа составлена в двух равноценных вариантах. По сравнению с контрольной работой увеличено количество заданий. Соответственно у учащихся возрастает возможность выбора задач. Все задания разбиты на блоки А, В и С. Самые простые задачи находятся в части А, более сложные – в части В, еще сложнее – в части С. Каждая задача из блока А оценивается в 1 балл, из блока В – в 2 балла, из блока С – в 3 балла. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов и блока С –

9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» – за 10 баллов, оценка «5» – за 14 баллов.

Так как эта работа является зачетной, то в нее не включены принципиально новые задачи. Поэтому разбору заданий работы отдельного занятия можно и не посвящать (решения задач могут быть вывешены на стенде). Для стендового размещения разбор вариантов приводится.

III. Варианты зачетной работы

Вариант 1

А

1. Дана функция $y(x) = 7x^2 + 3x - 4$. Найти $y(-2)$.

2. При каких значениях аргумента значение функции $y = x^2 - 7x + 9$ равно 3?

3. Найдите координаты вершины параболы $y = 3x^2 + 4x + 1$.

4. Напишите уравнение параболы $y = x^2 + px + q$, проходящей через точки $A(-2; 19)$ и $B(3; -11)$.

5. Найти общие точки параболы $y = x^2 - 5x + 3$ и прямой $y = x - 5$.

6. Периметр прямоугольника равен 60 см. Какими должны быть его стороны, чтобы площадь прямоугольника была наибольшей? Найти эту площадь.

7. Постройте график функции $y = -x^2 - 2x + 3$.

В

8. Дана функция $y(x) = 3x^2 - 2x + 1$. Найти $y(2x - 1)$.

9. Написать уравнение параболы, проходящей через точки $A(-1; 1)$, $B(0; -4)$ и $C(2; -2)$.

10. Функция $y = 3x^2 + bx - 4$ принимает наименьшее значение в точке $x_0 = -2$. Найдите это значение.

11. Постройте график функции $y = x^2 - 4|x| + 3$.

С

12. Дана функция $y(2 - x) = 2x^2 - x - 5$. Найти $y(x)$.

13. Постройте график функции $y = \dfrac{3-x}{|x-1|+2}$.

14. Постройте график функции $y = |x^2 - 4x|$.

Вариант 2

А

1. Дана функция $y(x) = -5x^2 + 4x - 7$. Найти $y(-3)$.

2. При каких значениях аргумента значение функции $y = x^2 - 4x - 2$ равно 3?

3. Найдите координаты вершины параболы $y = -2x^2 + 3x + 5$.

4. Напишите уравнение параболы $y = x^2 + px + q$, проходящей через точки $A(-1; 9)$ и $B(-3; 3)$.

5. Найти общие точки параболы $y = x^2 - 3x - 2$ и прямой $y = 2x - 8$.

6. Периметр прямоугольника равен 80 см. Какими должны быть его стороны, чтобы площадь прямоугольника была наибольшей? Найти эту площадь.

7. Постройте график функции $y = x^2 - 2x - 3$.

B

8. Дана функция $y(x) = 2x^2 - 3x + 4$. Найти $y(2x + 1)$.

9. Написать уравнение параболы, проходящей через точки $A(-1; -6)$, $B(0; -1)$ и $C(3; -22)$.

10. Функция $y = -2x^2 + bx - 5$ принимает наибольшее значение в точке $x_0 = -3$. Найдите это значение.

11. Постройте график функции $y = x^2 - 6|x| + 5$.

C

12. Дана функция $y(3 - x) = 3x^2 - 2x + 1$. Найти $y(x)$.

13. Постройте график функции $y = \dfrac{x+1}{|x-1|+2}$.

14. Постройте график функции $y = |x^2 - 4x + 3|$.

IV. Разбор заданий зачетной работы

Вариант 1

1. Подставим значение аргумента $x = -2$ в уравнение функции и получим $y(-2) = -7\cdot(-2)^2 + 3\cdot(-2) - 4 = -28 - 6 - 4 = -38$.

Ответ: -38.

2. Так как значение функции равно 3, то получим квадратное уравнение $x^2 - 7x + 9 = 3$ или $x^2 - 7x + 6 = 0$. Его корни $x_1 = 1$ и $x_2 = 6$.

Ответ: $x_1 = 1$ и $x_2 = 6$.

3. Для квадратичной функции $y = 3x^2 + 4x + 1$ найдем координаты вершины параболы: $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{4}{2\cdot 3} = -\dfrac{2}{3}$ и $y_0 = y\left(-\dfrac{2}{3}\right) =$

$$= 3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 4\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + 1 = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} + 1 = -\frac{1}{3}.$$

Ответ: $x_0 = -\dfrac{2}{3}$, $y_0 = -\dfrac{1}{3}$.

4. Так как парабола $y = x^2 + px + q$ проходит через точки $A(-2; 19)$ и $B(3; -11)$, то координаты этих точек удовлетворяют уравнению параболы. Получаем систему уравнений: $\begin{cases} 19 = 4 - 2p + q, \\ -11 = 9 + 3p + q, \end{cases}$ или $\begin{cases} 15 = -2p + q, \\ -20 = 3p + q. \end{cases}$ Вычтем из первого уравнения второе и получим: $35 = -5p$, откуда $p = -7$.

Подставим эту величину в первое уравнение: $15 = -2\cdot(-7) + q$ и найдем $q = 1$.

Итак, уравнение параболы $y = x^2 - 7x + 1$.

Ответ: $y = x^2 - 7x + 1$.

5. Координаты общей точки параболы и прямой удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} y = x^2 - 5x + 3, \\ y = x - 5. \end{cases}$ Приравняем правые части уравнений и получим квадратное уравнение $x^2 - 5x + 3 = x - 5$ или $x^2 - 6x + 8 = 0$, корни которого $x_1 = 2$ и $x_2 = 4$.

Используя второе уравнение, найдем соответствующие значения y: $y_1 = 2 - 5 = -3$ и $y_2 = 4 - 5 = -1$.

Итак, данные парабола и прямая имеют две общие точки $(2; -3)$ и $(4; -1)$.

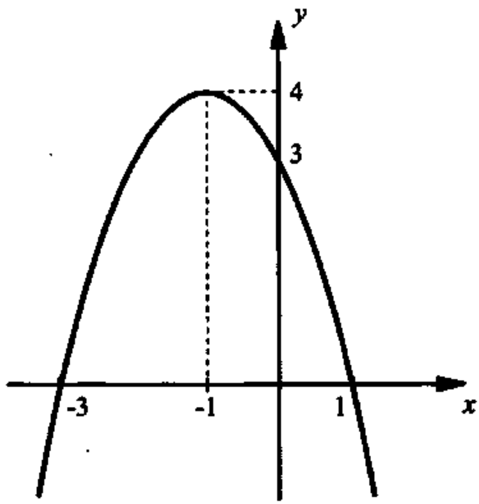
Ответ: $(2; -3)$ и $(4; -1)$.

6. Полупериметр прямоугольника равен 30 см. Если одна его сторона равна x (см), то другая $30 - x$ (см). Площадь прямоугольника $S = x(30 - x) = -x^2 + 30x$. Эта функция имеет наибольшее значение при $x = 15$, такая площадь равна $S = -15^2 + 30\cdot 15 = 225$ (см^2).

Итак, при заданном периметре прямоугольника наибольшую площадь 225 см^2 имеет квадрат со стороной 15 см.

Ответ: 15 см, 15 см, 225 см^2.

7. Построим график функции $y = -x^2 - 2x + 3$. Найдем точки пересечения графика с осью абсцисс. Получаем уравнение $0 = x^2 - 2x + 3$, корни которого $x_1 = -3$ и $x_2 = 1$. Абсцисса вершины параболы $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{-3 + 1}{2} = -1$, и ордината $y_0 = y(-1) = -1 + 2 + 3 = 4$. Найдем точку пересечения с осью ординат. Положим $x = 0$ и получим $y(0) = 3$. Через отмеченные точки проведем параболу.



Ответ: см. график.

8. Для функции $y(x) = 3x^2 - 2x + 1$ подставим значение аргумента $2x - 1$ и получим $y(2x-1) = 3\cdot(2x-1)^2 - 2(2x-1) + 1 = 12x^2 - 16x + 6$.

Ответ: $12x^2 - 16x + 6$.

9. Общее уравнение параболы $y = ax^2 + bx + c$. Так как парабола проходит через точки $A(-1; 1)$, $B(0; -4)$ и $C(2; -2)$, то координаты этих точек удовлетворяют уравнению параболы. Получаем систему линейных уравнений $\begin{cases} 1 = a - b + c, \\ -4 = c, \\ -2 = 4a - 2b + c. \end{cases}$ Подставим значение $c = -4$ в первое и третье уравнения и получим систему уравнений $\begin{cases} 5 = a - b, \\ 2 = 4a - 2b \end{cases}$ или $\begin{cases} 5 = a - b, \\ 1 = 2a - b. \end{cases}$ Вычтем из первого уравнения второе и получим $4 = -a$, откуда $a = -4$. Подставим это значение в первое уравнение $5 = -4 - b$, откуда $b = -9$. Тогда уравнение параболы $y = -4x^2 - 9x - 4$.

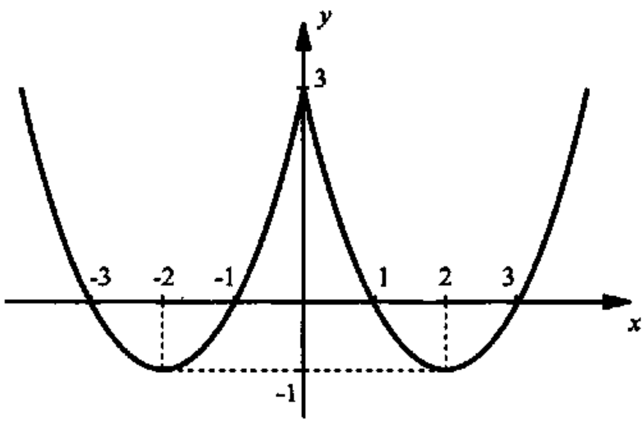
Ответ: $y = -4x^2 - 9x - 4$.

10. Так как функция $y = 3x^2 + bx - 4$ принимает наименьшее значение в точке $x_0 = -2$, то получаем уравнение $-2 = -\dfrac{b}{2\cdot 3}$, откуда $b = 12$. Поэтому функция имеет вид $y(x) = 3x^2 + 12x - 4$. Найдем

наименьшее значение функции $y(x_0) = y(-2) = 3\cdot(-2)^2 + 12\cdot(-2) - 4 = -16$.

Ответ: -16.

11. Построим график функции $y = x^2 - 4|x| + 3$. Значения функции при двух симметричных значениях аргумента совпадают, например, $y(-2) = y(2) = -1$. Поэтому график данной функции симметричен относительно оси ординат. Достаточно построить график функции при $x \geq 0$ и зеркально отразить его влево относительно оси ординат.



Ответ: см. график.

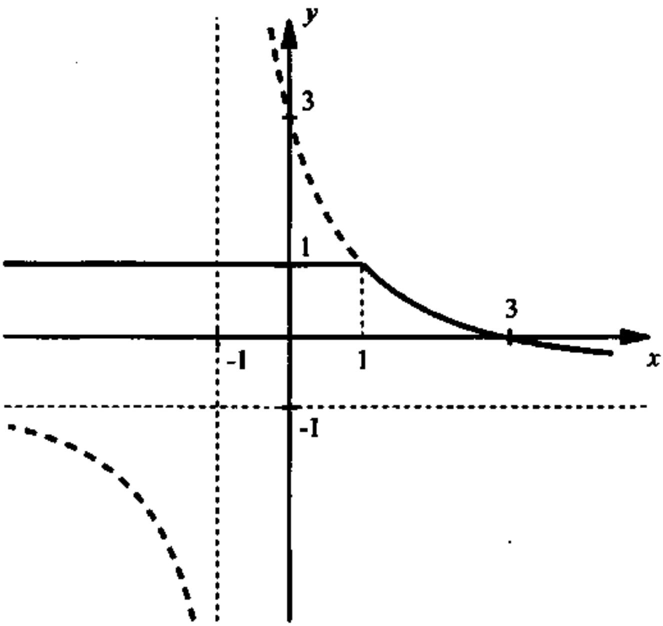
12. Дана функция $y(2-x) = 2x^2 - x - 5$. Чтобы найти $y(x)$, введем новую переменную $t = 2 - x$, выразим $x = 2 - t$. Подставим эту величину в функцию $y(2 - x) = 2x^2 - x - 5$ и получим $y(t) = 2(2-t)^2 - (2-t) - 5 = 2t^2 - 7t + 1$. Итак, имеем $y(t) = 2t^2 - 7t + 1$. Так как не имеет значения, какой буквой обозначен аргумент функции, то можно считать, что $y(x) = 2x^2 - 7x + 1$.

Ответ: $y(x) = 2x^2 - 7x + 1$.

13. Надо раскрыть знак модуля в функции $y = \dfrac{3-x}{|x-1|+2}$. При $x < 1$ получаем: $y = \dfrac{3-x}{-(x-1)+2} = \dfrac{3-x}{3-x} = 1$. При $x \geq 1$ имеем: $y = \dfrac{3-x}{x-1+2} = \dfrac{3-x}{x+1}$.

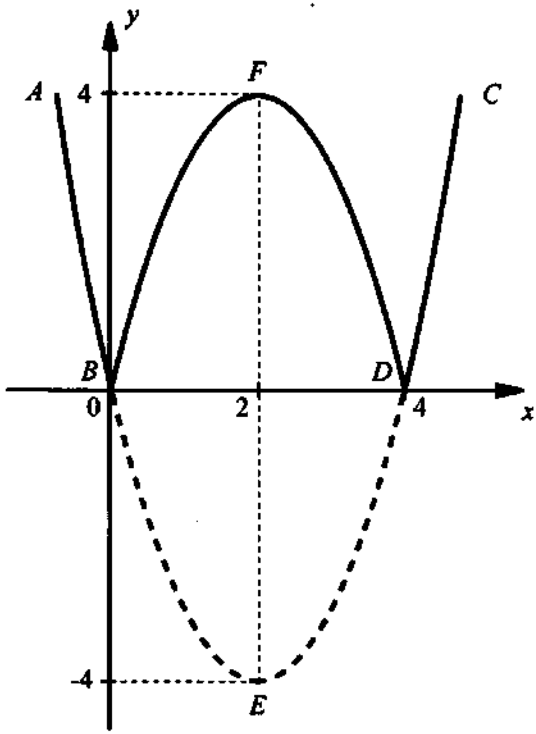
Выделим в этом выражении целую часть: $y = \dfrac{-(x+1)+4}{x+1} =$

$= -1 + \dfrac{4}{x+1}$. Таким образом, надо построить график функции $y = \begin{cases} 1, \text{ если } x < 1, \\ \dfrac{4}{x+1} - 1, \text{ если } x \ge 1. \end{cases}$ Поэтому при $x < 1$ строим прямую $y = 1$, при $x \ge 1$ – гиперболу $y = \dfrac{4}{x+1} - 1$. Этот график получается смещением графика $y = \dfrac{4}{x}$ на одну единицу влево и на одну единицу вниз. Таким образом, «по кусочкам» получаем график (сплошная линия).



Ответ: см. график.

14. Построим график функции $y = |x^2 - 4x|$. Сначала построим график функции $y = x^2 - 4x$ по характерным точкам: точкам пересечения с осями координат и вершине параболы (пунктирная кривая). Для тех частей параболы, для которых значения $y \ge 0$ (часть AB и CD) функции $y = |x^2 - 4x|$ и $y = x^2 - 4x$ совпадают. Поэтому кривые AB и CD являются также частями графика функции $y = |x^2 - 4x|$.



Для той части графика, для которой значение $y < 0$, по определению модуля $|x^2 - 4x| = -(x^2 - 4x)$.

Поэтому ординаты части BED графика меняют знак на противоположный.

Кривая BED отражается относительно оси абсцисс и переходит в кривую BFD.

Итак, график функции $y = |x^2 - 4x|$ построен.

Ответ: см. график.

Вариант 2

1. Подставим значение аргумента $x = -3$ в уравнение функции и получим $y(-3) = -5 \cdot (-3)^2 + 4 \cdot (-3) - 7 = -45 - 12 - 7 = -64$.

Ответ: −64.

2. Так как значение функции равно 3, то получим квадратное уравнение $x^2 - 4x - 2 = 3$ или $x^2 - 4x - 5 = 0$. Его корни $x_1 = -1$ и $x_2 = 5$.

Ответ: $x_1 = -1$ и $x_2 = 5$.

3. Для квадратичной функции $y = -2x^2 + 3x + 5$ найдем координаты вершины параболы: $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{-2\cdot 2} = \frac{3}{4}$ и $y_0 = y\left(\frac{3}{4}\right) =$

$$= -2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3\cdot\frac{3}{4} + 5 = -\frac{9}{8} + \frac{9}{4} + 5 = 6\frac{1}{8}.$$

Ответ: $x_0 = \frac{3}{4}$, $y_0 = 6\frac{1}{8}$.

4. Так как парабола $y = x^2 + px + q$ проходит через точки $A(-1; 9)$ и $B(-3; 3)$, то координаты этих точек удовлетворяют уравнению параболы. Получаем систему уравнений: $\begin{cases} 9 = 1 - p + q, \\ 3 = 9 - 3p + q \end{cases}$ или $\begin{cases} 8 = -p + q, \\ -6 = -3p + q. \end{cases}$ Вычтем из первого уравнения второе и получим: $14 = 2p$, откуда $p = 7$. Подставим эту величину в первое уравнение: $8 = -7 + q$ и найдем $q = 15$. Итак, уравнение параболы $y = x^2 + 7x + 15$.

Ответ: $y = x^2 + 7x + 15$.

5. Координаты общей точки параболы и прямой удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} y = x^2 - 3x - 2, \\ y = 2x - 8. \end{cases}$ Приравняем правые части уравнений и получим квадратное уравнение $x^2 - 3x - 2 = 2x - 8$ или $x^2 - 5x + 6 = 0$, корни которого $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$. Используя второе уравнение, найдем соответствующие значения y: $y_1 = 2\cdot 2 - 8 = -4$ и $y_2 = 2\cdot 3 - 8 = -2$. Итак, данные парабола и прямая имеют две общие точки $(2; -4)$ и $(3; -2)$.

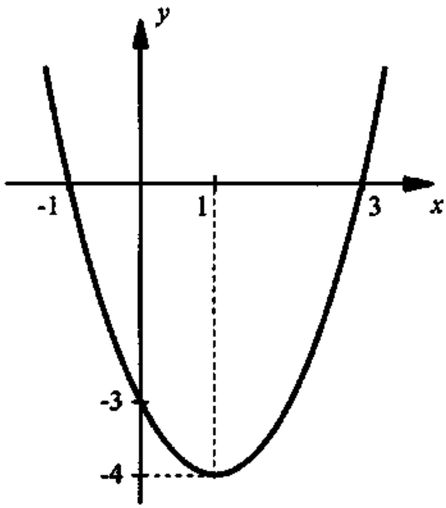
Ответ: $(2; -4)$ и $(3; -2)$.

6. Полупериметр прямоугольника равен 40 см. Если одна его сторона равна x (см), то другая $40 - x$ (см). Площадь прямоугольника $S = x(40 - x) = -x^2 + 40x$. Эта функция имеет наибольшее значение при $x = 20$, такая площадь равна $S = -20^2 + 40\cdot 20 = 400$ (см^2). Итак, при заданном периметре прямоугольника наибольшую площадь 400 см^2 имеет квадрат со стороной 20 см.

Ответ: 20 см, 20 см, 400 см^2.

7. Построим график функции $y = x^2 - 2x - 3$. Найдем точки пересечения графика с осью абсцисс. Получаем уравнение $0 = x^2 - 2x - 3$, корни которого $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$. Абсцисса вершины параболы

$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1$, и ордината $y_0 = y(1) = 1 - 2 - 3 = -4$. Найдем точку пересечения с осью ординат. Положим $x = 0$ и получим $y(0) = -3$. Через отмеченные точки проведем параболу.



Ответ: см. график.

8. Для функции $y(x) = 2x^2 - 3x + 4$ подставим значение аргумента $2x + 1$ и получим $y(2x+1) = 2\cdot(2x+1)^2 - 3(2x+1) + 4 = 8x^2 + 2x + 3$.

Ответ: $8x^2 + 2x + 3$.

9. Общее уравнение параболы $y = ax^2 + bx + c$. Так как парабола проходит через точки $A(-1; -6)$, $B(0; -1)$ и $C(3; -22)$, то координаты этих точек удовлетворяют уравнению параболы. Получаем систему линейных уравнений $\begin{cases} -6 = a - b + c, \\ -1 = c, \\ -22 = 9a + 3b + c. \end{cases}$ Подставим значение $c = -1$ в первое и третье уравнения и получим систему уравнений $\begin{cases} -5 = a - b, \\ -21 = 9a + 3b \end{cases}$ или $\begin{cases} -5 = a - b, \\ -7 = 3a + b. \end{cases}$

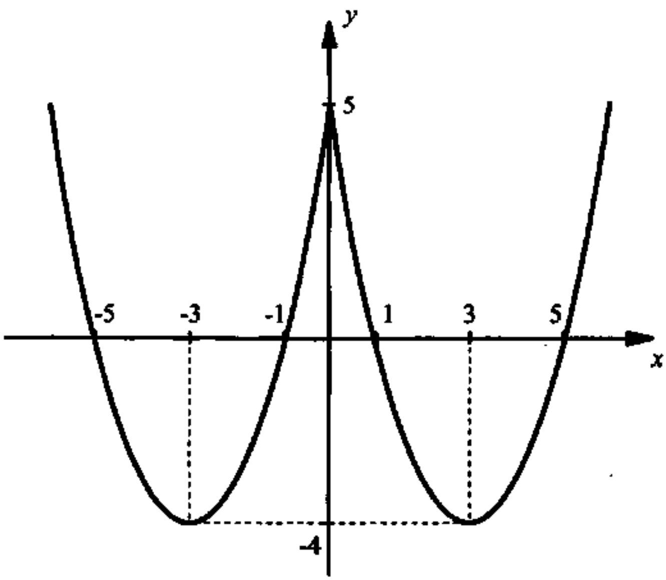
Сложим уравнения системы и получим $-12 = 4a$, откуда $a = -3$. Подставим это значение в первое уравнение $-5 = -3 - b$, откуда $b = 2$. Тогда уравнение параболы $y = -3x^2 + 2x - 1$.

Ответ: $y = -3x^2 + 2x - 1$.

10. Так как функция $y = -2x^2 + bx - 5$ принимает наибольшее значение в точке $x_0 = -3$, то получаем уравнение $-3 = -\frac{b}{-2 \cdot 2}$, откуда $b = -12$. Поэтому функция имеет вид $y(x) = -2x^2 - 12x - 5$. Найдем наибольшее значение функции $y(x_0) = y(-3) = -2 \cdot (-3)^2 - 12 \cdot (-3) - 5 = 13$.

Ответ: 13.

11. Построим график функции $y = x^2 - 6|x| + 5$. Значения функции при двух симметричных значениях аргумента совпадают, например, $y(-2) = y(2) = -3$. Поэтому график данной функции симметричен относительно оси ординат. Достаточно построить график функции при $x \geq 0$ и зеркально отразить его влево относительно оси ординат.

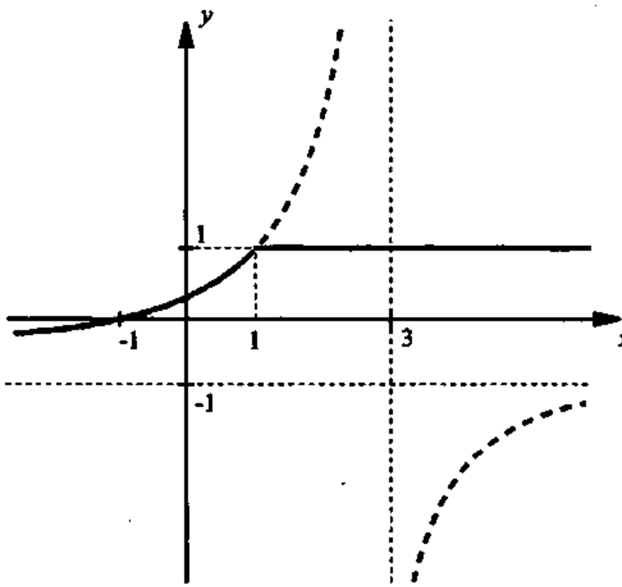


Ответ: см. график.

12. Дана функция $y(3 - x) = 3x^2 - 2x + 1$. Чтобы найти $y(x)$, введем новую переменную $t = 3 - x$, выразим $x = 3 - t$. Подставим эту величину в функцию $y(3 - x) = 3x^2 - 2x + 1$ и получим $y(t) = 3(3 - t)^2 - 2(3 - t) + 1 = 3t^2 - 16t + 22$. Итак, имеем $y(t) = 3t^2 - 16t + 22$. Так как не имеет значения, какой буквой обозначен аргумент функции, то можно считать, что $y(x) = 3x^2 - 16x + 22$.

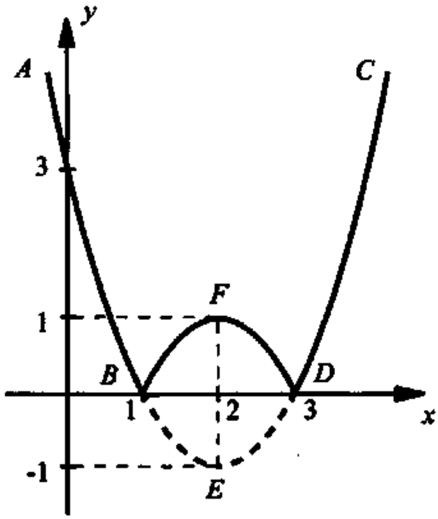
Ответ: $y(x) = 3x^2 - 16x + 22$.

13. Надо раскрыть знак модуля в функции $y = \dfrac{x+1}{|x-1|+2}$. При $x < 1$ получаем: $y = \dfrac{x+1}{-(x-1)+2} = \dfrac{x+1}{3-x}$. Выделим в этом выражении целую часть: $y = \dfrac{4-(3-x)}{3-x} = \dfrac{4}{3-x} - 1 = -1 - \dfrac{4}{x-3}$. При $x \geq 1$ имеем: $y = \dfrac{x+1}{x-1+2} = \dfrac{x+1}{x+1} = 1$. Таким образом, надо построить график функции $y = \begin{cases} -\dfrac{4}{x-3} - 1, \text{ если } x < 1, \\ 1, \text{ если } x \geq 1. \end{cases}$ Поэтому при $x < 1$ строим гиперболу $y = -\dfrac{4}{x-3} - 1$. Этот график получается смещением графика $y = -\dfrac{4}{x}$ на три единицы вправо и на одну единицу вниз. При $x \geq 1$ строим прямую $y = 1$. Таким образом, «по кусочкам» получаем график (сплошная линия).



Ответ: см. график.

14. Построим график функции $y = |x^2 - 4x + 3|$. Сначала построим график функции $y = x^2 - 4x + 3$ по характерным точкам: точкам пересечения с осями координат и вершине параболы (пунктирная кривая). Для тех частей параболы, для которых значения $y \geq 0$ (часть AB и CD) функции $y = |x^2 - 4x + 3|$ и $y = x^2 - 4x + 3$ совпадают. Поэтому кривые AB и CD являются также частями графика функции $y = |x^2 - 4x + 3|$.



Для той части графика, для которой значение $y < 0$, по определению модуля $|x^2 - 4x + 3| = -(x^2 - 4x + 3)$. Поэтому ординаты части BED графика меняют знак на противоположный. Кривая BED отражается относительно оси абсцисс и переходит в кривую BFD.

Итак, график функции $y = |x^2 - 4x + 3|$ построен.

Ответ: см. график.

Глава 4. Квадратные уравнения

§ 24. Основные понятия

Уроки 58–59. Понятия, связанные с квадратным уравнением

Цель: дать определения некоторых видов квадратных уравнений и рассмотреть решение простейших уравнений.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

В 7-м и 8-м классах мы уже рассматривали (и даже решали) некоторые квадратные уравнения. Теперь необходимо обобщить эти знания и изучить квадратные уравнения более детально.

Уравнение вида $ax^2+bx+c=0$ называют квадратным. Здесь: x – переменная (неизвестная); a, b, c – коэффициенты, причем $a \neq 0$. При этом число a называют **первым коэффициентом** (или **старшим коэффициентом**), b – **вторым коэффициентом** и c – **свободным членом**.

Заметим, что квадратное уравнение называют еще уравнением второй степени, т. к. его левая часть ax^2+bx+c является квадратным трехчленом (многочленом второй степени).

Пример 1

Обсудим уравнение $(a-1)x^2+2ax+3a+2=0$.

Если старший коэффициент $a-1 \neq 0$ (т. е. $a \neq 1$), то данное уравнение является квадратным. Если $a=1$, то при подстановке этого значения в данное уравнение получаем уравнение $2x+5=0$, которое является линейным.

Пример 2

Приведем уравнение $(3x+5)^2=(2x-1)(2x+1)$ к виду $ax^2+bx+c=0$.

Используем формулы сокращенного умножения и получим: $9x^2+30x+25=4x^2-1$.

Перенесем все члены уравнения в левую часть: $9x^2+30x+25-4x^2+1=0$ и приведем подобные члены: $5x^2+30x+26=0$. Получим квадратное уравнение, коэффициенты которого: $a=5$, $b=30$ и $c=26$.

Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ называют **приведенным,** если его старший коэффициент $a = 1$ и называют **неприведенным,** если старший коэффициент $a \neq 1$.

Пример 3

По определению уравнение $x^2-7x-2=0$ – приведенное квадратное уравнение; уравнение $3x^2-5x-4=0$ – неприведенное квадратное уравнение.

Очевидно, что любое неприведенное уравнение можно свести к приведенному уравнению. Так как $a \neq 0$, то разделив каждый член неприведенного уравнения $ax^2+bx+c=0$ на старший коэффициент, получим приведенное уравнение $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$.

Полным квадратным уравнением называют уравнение, в котором присутствуют все три члена: ax^2, bx и c (т. е. в котором все три коэффициента a, b и c не равны нулю).

Если в квадратном уравнении $ax^2+bx+c=0$ хотя бы один из коэффициентов b и c равен нулю, то такое уравнение называют **неполным квадратным уравнением.**

В соответствии с определением неполные квадратные уравнения бывают трех видов:

1) $ax^2+c=0$ (где $c \neq 0$);
2) $ax^2+bx=0$ (где $b \neq 0$);
3) $ax^2=0$.

Пример 4

При каком значении параметра a уравнение $3x^2+(2a+4)x+a-3=0$ является неполным квадратным уравнением?

Так как старший коэффициент данного уравнения равен 3, то оно всегда является квадратным. Такое уравнение будет неполным, если его второй коэффициент или свободный член равны нулю.

Если второй коэффициент равен нулю (т. е. $2a + 4 = 0$, откуда $a = -2$), то уравнение принимает вид $3x^2 - 5 = 0$ и является неполным квадратным уравнением.

Если свободный член равен нулю (т. е. $a - 3 = 0$, откуда $a = 3$), то уравнение имеет вид $3x^2 + 10x = 0$ и также является неполным квадратным уравнением.

Корнем квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ называют такое значение переменной x, при котором квадратный трехчлен

ax^2+bx+c обращается в нуль. Такое значение переменной x также называют **корнем квадратного трехчлена**. Другими словами, корнем квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ называют такое значение переменной x, при подстановке которого в уравнение получают верное числовое равенство $0 = 0$ (обычное определение для всех уравнений).

Пример 5

Уравнение $2x^2 - 3x + 1 = 0$ имеет корни $x_1 = 1$ и $x_2 = 0{,}5$. Проверим это. При подстановке значения $x_1 = 1$ в уравнение получаем верное числовое равенство: $2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 0$ или $0 = 0$. При подстановке значения $x_2 = 0{,}5$ в уравнение так же получаем верное числовое равенство: $2 \cdot 0{,}5^2 - 3 \cdot 0{,}5 + 1 = 0$, или $0{,}5 - 1{,}5 + 1 = 0$, или $0 = 0$.

Решить квадратное уравнение (как и любое другое) – значит найти все его корни или доказать, что корней нет.

Обсудим сначала **решение неполных квадратных уравнений. Основной прием решения** таких уравнений – **разложение левой части уравнения на множители.** В результате решение квадратного уравнения сводится к решению линейных уравнений.

Пример 6

Решим уравнение $-5x^2 + 15 = 0$.

Разделим все члены уравнения на число -5 (не равное нулю) и получим приведенное уравнение $x^2 - 3 = 0$. Учтем, что $3=(\sqrt{3})^2$, и по формуле разности квадратов разложим левую часть уравнения на множители: $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$. Так как произведение двух множителей равно нулю, то хотя бы один из множителей равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $x+\sqrt{3}=0$ (его корень $x_1=-\sqrt{3}$) и $x-\sqrt{3}=0$ (корень $x_2=\sqrt{3}$). Таким образом, данное квадратное уравнение имеет два корня $x_1=-\sqrt{3}$ и $x_2=\sqrt{3}$.

Аналогично решаются **неполные квадратные уравнения вида** $\boldsymbol{ax^2+c=0}$ (при $c \neq 0$). Разделим все члены уравнения на число a (где $a \neq 0$) $x^2+\frac{c}{a}=0$ и запишем уравнение в виде $x^2-\left(-\frac{c}{a}\right)=0$.

Так как $c \neq 0$, то $-\frac{c}{a} \neq 0$.

Если $-\frac{c}{a}>0$, то представим это число в виде $-\frac{c}{a}=\left(\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)^2$ и разложим левую часть уравнения на множители по формуле разности квадратов: $x^2-\left(\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)^2=0$ или $\left(x+\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)\left(x-\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)=0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $x+\sqrt{-\frac{c}{a}}=0$ (его корень $x_1=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$) и $x-\sqrt{-\frac{c}{a}}=0$ (его корень $x_2=\sqrt{-\frac{c}{a}}$).

Итак, при $-\frac{c}{a}>0$ уравнение $ax^2+c=0$ имеет два противоположных по знаку корня $x_1=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$ и $x_2=\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Случай $-\frac{c}{a}=0$ не рассматривается, т. к. $c\neq 0$.

Если $-\frac{c}{a}<0$, то в уравнении $x^2-\left(-\frac{c}{a}\right)=0$ первый член $x^2\geq 0$ при любом значении x, второй член $-\left(-\frac{c}{a}\right)>0$. Поэтому выражение $x^2-\left(-\frac{c}{a}\right)>0$ при любом значении x. Следовательно, в этом случае уравнение $x^2-\left(-\frac{c}{a}\right)=0$ (а также исходное уравнение $ax^2+c=0$) не имеет корней.

Теперь рассмотрим неполное квадратное уравнение второго вида.

Пример 7

Решим уравнение $3x^2+4x=0$.

В левой части уравнения вынесем общий множитель x за скобки и разложим ее на множители: $x(3x+4)=0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $x=0$ (его корень $x_1=0$) и $3x+4=0$ (корень $x_2=-\frac{4}{3}=-1\frac{1}{3}$). Итак, данное неполное квадратное уравнение имеет два корня $x_1=0$ и $x_2=-1\frac{1}{3}$.

Аналогично решаются **неполные квадратные уравнения вида** $ax^2 + bx = 0$. Разложим левую часть уравнения на множители $x(ax + b) = 0$. Произведение двух множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $x = 0$ (его корень $x_1 = 0$) и $ax + b = 0$ (его корень $x_2 = -\frac{b}{a}$). Итак, неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + bx = 0$ (при $b \neq 0$) имеет два различных корня $x_1 = 0$ и $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Наконец, рассмотрим неполное квадратное уравнение третьего вида $ax^2 = 0$.

Пример 8

Решим уравнение $-7x^2 = 0$.

Разложим левую часть уравнения на множители: $-7 \cdot x \cdot x = 0$. Так как произведение множителей равно нулю, то хотя бы один из них равен нулю. Очевидно, что число $-7 \neq 0$. Поэтому получаем два одинаковых линейных уравнения $x = 0$ (его корень $x = 0$). Следовательно, данное уравнение имеет единственный корень (часто говорят, два одинаковых корня) $x = 0$.

Аналогично решаются **неполные квадратные уравнения вида** $ax^2 = 0$. Разложим его левую часть на множители: $a \cdot x \cdot x = 0$. Так как $a \neq 0$, то имеем два одинаковых линейных уравнения $x = 0$ (его корень $x = 0$). Итак, неполное квадратное уравнение вида $ax^2 = 0$ имеет единственный корень (или два одинаковых корня) $x = 0$.

Решения неполных квадратных уравнений приведены в таблице.

Вид неполного квадратного уравнения	**Корни уравнения**
$ax^2 + c = 0$ (где $c \neq 0$)	При $-\frac{c}{a} > 0$ $x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$ и $x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$
	При $-\frac{c}{a} < 0$ корней нет
$ax^2 + bx = 0$ (где $b \neq 0$)	$x_1 = 0$ и $x_2 = -\frac{b}{a}$
$ax^2 = 0$	$x = 0$

Заметим, что разложением на множители решают и полные квадратные уравнения.

Пример 9

Решим уравнение $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Разложим левую часть уравнения на множители двумя способами.

Способ 1. Используем способ группировки: $x^2 - 3x - x + 3 = 0$, или $(x^2 - 3x) + (-x + 3) = 0$, или $x(x-3) - (x-3) = 0$, или $(x-3)(x-1) = 0$. После этого легко находим корни данного уравнения $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$.

Способ 2. Используем формулы сокращенного умножения. Сначала выделим полный квадрат разности: $(x^2 - 4x + 4) - 1 = 0$ или $(x-2)^2 - 1^2 = 0$. Теперь применим формулу разности квадратов: $(x-2-1)(x-2+1) = 0$ или $(x-3)(x-1) = 0$, откуда $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$.

Однако, пока мы рассмотрели только частные случаи квадратных уравнений (или неполные уравнения или полные уравнения с «хорошими» коэффициентами). Но, например, «безобидное» уравнение $x^2 - 2x - 1 = 0$ имеет корни $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$, которые не так просто найти. Поэтому нужен универсальный способ решения любых квадратных уравнений, который будет рассмотрен в следующем параграфе.

III. Контрольные вопросы

1. Запишите квадратное уравнение в общем виде. Приведите примеры квадратных уравнений.

2. Какое уравнение называют приведенным? Поясните на примерах.

3. Какое квадратное уравнение называется неполным? Приведите примеры неполных квадратных уравнений.

4. Перечислите три вида неполных квадратных уравнений. Какие корни имеют эти уравнения?

IV. Задание на уроке

№ 24.5; 24.7; 24.10 (а, б); 24.11; 24.16; 24.19 (а, б); 24.21 (в, г); 24.22 (б); 24.24 (в); 24.25; 24.28; 24.31; 24.33 (а, б); 24.35 (в, г); 24.38 (а, б).

V. Задание на дом

№ 24.6; 24.8; 24.10 (в); 24.12; 24.17; 2419 (в, г); 24.21 (а, б); 24.22 (г); 24.24 (г); 24.26; 24.29; 24.32; 24.33 (в, г); 24.35 (а, б); 24.38 (в, г).

VI. Творческие задания

1. При каких значениях a уравнение является квадратным? Напишите это уравнение.

а) $(a-1)x^3+3ax^2+2x-5a=0$;

б) $(2a-4)x^3-(a-2)x^2+ax-3=0$;

в) $(2a+4)x^3-2ax^2+ax-7=0$;

г) $(3a+6)x^3+(a+2)x^2+2x+a=0$.

Ответы: а) при $a = 1$ $3x^2+2x-5=0$; б) ни при каких a; в) при $a=-2$ $4x^2-2x-7=0$; г) ни при каких a.

2. При каких значениях a уравнение является квадратным? При каких значениях a уравнение будет линейным? Напишите это уравнение и решите его.

а) $(a-2)x^2+2ax-5=0$;

б) $(a-1)(a+2)x^2+ax-3a+1=0$;

в) $(2a+2)x^2-3ax+a-2=0$;

г) $(a^2-9)x^2+2ax+2a-5=0$.

Ответы: а) при $a \neq 2$ – квадратное, при $a = 2$ – линейное $4x - 5 = 0$ (корень $x=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$); б) при $a \neq 1$ и $a \neq -2$ – квадратное, при $a = 1$ – линейное $x - 4 = 0$ (корень $x = 4$), при $a = -2$ – линейное $-2x + 7 = 0$ (корень $x = 3{,}5$); в) при $a \neq -1$ – квадратное, при $a = -1$ – линейное $3x - 3 = 0$ (корень $x = 1$); г) при $a \neq \pm 3$ – квадратное, при $a = 3$ – линейное $6x - 1 = 0$ (корень $x=\frac{1}{6}$), при $a = -3$ – линейное $-6x - 11 = 0$ (корень $x=-\frac{11}{6}=-1\frac{5}{6}$).

3. При каких значениях a уравнение является неполным квадратным? Напишите это уравнение и решите его.

а) $2x^2-(a-3)x-5a=0$;

б) $3x^2-(2a+4)x+2a=0$;

в) $(a-1)x^2+(a+2)x-3a=0$;

г) $(3a+6)x^2+(a-1)x+2a-6=0$.

Ответы: а) при $a = 3$: $2x^2 - 15 = 0$ (корни $x_1=-\sqrt{7{,}5}$ и $x_2=\sqrt{7{,}5}$), при $a = 0$: $2x^2 + 3x = 0$ (корни $x_1 = 0$ и $x_2=-1{,}5$); б) при

$a=-2$: $3x^2-4=0$ (корни $x_1=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ и $x_2=\frac{2}{\sqrt{3}}$), при $a=0$: $3x^2-4x=0$ (корни $x_1=0$ и $x_2=1\frac{1}{3}$); в) при $a=-2$: $-3x^2+6=0$ (корни $x_1=-\sqrt{2}$ и $x_2=\sqrt{2}$), при $a=0$: $-x^2+2x=0$ (корни $x_1=0$ и $x_2=2$); г) при $a=1$: $9x^2-4=0$ (корни $x_1=-\frac{2}{3}$ и $x_2=\frac{2}{3}$), при $a=3$: $15x^2+2x=0$ (корни $x_1=0$ и $x_2=-\frac{2}{15}$).

VII. Подведение итогов урока

§ 25. Формулы корней квадратных уравнений

Уроки 60–61. Решение квадратных уравнений

Цель: получить формулы для корней уравнений.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Среди перечисленных уравнений укажите:

а) квадратные уравнения; б) неполные квадратные уравнения; в) линейные уравнения:

а) $3x^2-5x+7=0$;
б) $2x^3-21x+7=0$;
в) $6x^2-2x=0$;
г) $-2x+3=0$;
д) $-3x^2+14=0$;
е) $4x+7=0$.

2. Какие корни имеет уравнение $ax^2 + c = 0$?

3. Решите квадратные уравнения:
а) $(2x - 1)(3x + 2) = 0$;
б) $2x^2 - 3x = 0$;
в) $3x^2 - 6 = 0$;
г) $-5x^2 = 0$.

Вариант 2

1. Среди перечисленных уравнений укажите:

а) квадратные уравнения; б) неполные квадратные уравнения; в) линейные уравнения:
а) $-7x + 5 = 0$;
б) $-2x^2 + 3x + 1 = 0$;
в) $4x^3 - 13x^2 = 0$;
г) $3x^2 + 5x = 0$;
д) $-2x^2 - 13 = 0$;
е) $3x - 11 = 0$.

2. Какие корни имеет уравнение $ax^2 + bx = 0$?

3. Решите квадратные уравнения:
а) $(2x - 2)(3x + 1) = 0$;
б) $2x^2 - 10 = 0$;
в) $3x^2 + 5x = 0$;
г) $-4x^2 = 0$.

III. Изучение нового материала

Из предыдущего урока видно, что при решении квадратных уравнений приходилось выделять квадрат двучлена. Чтобы постоянно не выполнять таких преобразований, достаточно один раз выполнить эти преобразования для общего вида квадратного уравнения и получить **формулу корней квадратного уравнения**. Далее эту формулу можно применять при решении любого квадратного уравнения.

Решим квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Разделим все члены уравнения на старший коэффициент a (напомним, что $a \neq 0$) и получим равносильное приведенное квадратное уравнение $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. В левой части уравнения выделим квадрат двучлена: $\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$ или $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$.

Введем новую переменную $z=x+\frac{b}{2a}$ и получим неполное квадратное уравнение: $z^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0$, или $z^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$, или $z^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$. Так как $a \neq 0$, то $4a^2$ – положительное число. Поэтому знак дроби $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ определяется знаком ее числителя b^2-4ac. Это выражение называют **дискриминантом квадратного уравнения** $ax^2+bx+c=0$ («дискриминант» по латыни означает «различитель», «определитель»). Его обозначают буквой D, т. е. $D=b^2-4ac$.

Тогда уравнение имеет вид $z^2=\frac{D}{4a^2}$.

Рассмотрим теперь различные возможные случаи этого решения в зависимости от D.

1) Если $D>0$, то уравнение имеет два противоположных по знаку корня $z_1=-\frac{\sqrt{D}}{2a}$ и $z_2=\frac{\sqrt{D}}{2a}$. Вернемся к старой неизвестной x и получим два линейных уравнения: $x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{D}}{2a}$ (откуда корень $x_1=\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$) и $x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{D}}{2a}$ (тогда корень $x_2=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$).

Итак, в случае $D>0$ квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет **два различных корня** $x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ **и** $x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$.

Принята следующая краткая запись корней $x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, где $D=b^2-4ac$ (1), которую называют **формулой корней квадратного уравнения.**

2) Если $D=0$, то уравнение $z^2=\frac{D}{4a^2}$ имеет вид $z^2=0$. Это уравнение имеет единственный корень (или два одинаковых корня)

$z = 0$. Вернемся к старой неизвестной x и получим линейное уравнение $x+\frac{b}{2a}=0$, корень которого $x=-\frac{b}{2a}$.

Итак, **в случае $D = 0$** квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет **единственный корень (или два одинаковых корня)** $x=-\frac{b}{2a}$.

Заметим, что в случае $D = 0$ также можно пользоваться формулой (1). Действительно, при $D = 0$ получаем $x = \frac{-b\pm\sqrt{0}}{2a}$ или $x=-\frac{b}{2a}$.

3) Если $D < 0$, то уравнение $z^2=\frac{D}{4a^2}$ не имеет корней, т. к. дробь $\frac{D}{4a^2}<0$. Следовательно, **при $D < 0$** квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ **не имеет корней.**

Таким образом, в зависимости от дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ может иметь: два различных корня при $D > 0$, единственный корень (или два одинаковых корня) при $D = 0$ и не иметь корней при $D < 0$, что отражено в таблице.

Дискриминант $D=b^2-4ac$	$D>0$	$D=0$	$D<0$
Корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$	Два различных корня $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$	Два равных корня (или один корень) $x_{1,2}=-\frac{b}{2a}$	Нет корней

Итак, при решении квадратного уравнения поступают следующим образом (**алгоритм решения уравнения $ax^2+bx+c=0$**):

1) Вычисляют дискриминант квадратного уравнения;

2) Сравнивают дискриминант с нулем;

3) Если дискриминант $D \geq 0$, то используют формулу корней (или приведенную таблицу), если дискриминант $D < 0$, то записывают, что корней нет.

Пример 1

Решим уравнение $3x^2 - 5x - 2 = 0$.

В данном уравнении коэффициенты $a = 3$, $b = -5$, $c = -2$. Найдем дискриминант $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4\cdot 3\cdot(-2) = 25 + 24 = 49$, $D > 0$. Поэтому уравнение имеет два различных корня. Используем формулу корней квадратного уравнения $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ и получим $x_{1,2} = \dfrac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2\cdot 3} = \dfrac{5 \pm 7}{6}$, т. е. $x_1 = \dfrac{5+7}{6} = \dfrac{12}{6} = 2$ и $x_2 = \dfrac{5-7}{6} = -\dfrac{2}{6} = -\dfrac{1}{3}$.

Ответ: $x_1 = 2$ и $x_2 = -\dfrac{1}{3}$.

Пример 2

Решим уравнение $4x^2 - 12x + 9 = 0$.

В данном уравнении коэффициенты $a = 4$, $b = -12$, $c = 9$. Найдем дискриминант $D = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4\cdot 4\cdot 9 = 144 - 144 = 0$. Поэтому уравнение имеет два равных корня (или один корень) $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-(-12) \pm \sqrt{0}}{2\cdot 4} = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$.

Ответ: $x = 1{,}5$.

Пример 3

Решим уравнение $2x^2 + 7x + 8 = 0$.

В данном уравнении коэффициенты $a = 2$, $b = 7$, $c = 8$. Найдем дискриминант $D = b^2 - 4ac = 7^2 - 4\cdot 2\cdot 8 = 49 - 64 = -15$. Так как дискриминант $D < 0$, то данное уравнение корней не имеет.

Ответ: корней нет.

Очень часто встречаются квадратные **уравнения с параметрами**.

Пример 4

Докажем, что при любом значении параметра a уравнение $3x^2 - 5ax - a^2 - 1 = 0$ имеет два различных корня.

Так как старший коэффициент данного уравнения не равен нулю, то это уравнение является квадратным. Найдем его дискриминант $D = (-5a)^2 - 4\cdot 3\cdot(-a^2 - 1) = 25a^2 + 12a^2 + 12 = 37a^2 + 12$. Так как при всех значениях a выражение $a^2 \geq 0$, то дискриминант $D > 0$. Следовательно, данное квадратное уравнение имеет два различных корня.

Пример 5

При всех значениях параметра a решим уравнение $ax^2+(3a-2)x-6=0$.

Если старший коэффициент a данного уравнения равен 0, то это уравнение не является квадратным. Подставим значение $a = 0$ в уравнение и получим линейное уравнение $-2x - 6 = 0$, которое имеет единственный корень $x = -3$.

Если старший коэффициент $a \neq 0$, то данное уравнение является квадратным. Найдем его дискриминант $D=(3a-2)^2-$ $-4\cdot a\cdot(-6)=9a^2-12a+4+24a=9a^2+12a+4=(3a+2)^2$ и корни $x=\dfrac{-(3a-2)\pm\sqrt{(3a+2)^2}}{2a}=\dfrac{-3a+2\pm(3a+2)}{2a}$, т. е. $x_1=\dfrac{-3a+2+3a+2}{2a}=$ $=\dfrac{4}{2a}=\dfrac{2}{a}$ и $x_2=\dfrac{-3a+2-3a-2}{2a}=\dfrac{-6a}{2a}=-3$. Так как в задачах с параметрами очень важен грамотный ответ, то выпишем его: при $a\neq 0$ $x_1=\dfrac{2}{a}$ и $x_2=-3$, при $a=0$ $x=-3$.

Пример 6

Один из корней квадратного уравнения $x^2+2ax+2-3a=0$ равен 1. Найдем значение параметра a и второй корень уравнения.

Так как один корень $x_1 = 1$ известен, то подставим его в уравнение и получим верное равенство: $1^2 + 2a\cdot 1 + 2 - 3a = 0$ или $3 - a = 0$, откуда $a = 3$. Подставим это значение параметра a в данное уравнение и получим: $x^2 + 2\cdot 3\cdot x + 2 - 3\cdot 3 = 0$ или $x^2 + 6x - 7 = 0$. Решая это квадратное уравнение, найдем корни $x_1 = 1$ (этот корень был известен) и $x_2 = -7$.

Итак, $a = 3$, $x_2 = -7$.

Также часто встречаются квадратные уравнения, содержащие модули.

Пример 7

Решим уравнение $|x^2-3x+4|=|2x-2|$.

Используем свойства модуля: если модули двух выражений равны, то сами выражения или равны, или противоположны по знаку. Рассмотрим эти случаи.

1) $x^2-3x+4=2x-2$ или $x^2-5x+6=0$. Это уравнение имеет два корня $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$.

2) $x^2-3x+4=-(2x-2)$, или $x^2-3x+4=-2x+2$, или $x^2-x+2=0$. Дискриминант этого уравнения отрицательный, и оно не имеет корней.

Итак, данное уравнение имеет два корня $x_1=2$ и $x_2=3$.

Пример 8

Решим уравнение $x|x|-7x+10=0$.

Используем определение модуля и рассмотрим два случая.

1) Если $x \geq 0$, то $|x|=x$ и уравнение имеет вид $x^2-7x+10=0$. Его корни $x_1=2$ и $x_2=5$ удовлетворяют условию $x \geq 0$ и являются корнями данного уравнения.

2) Если $x<0$, то $|x|=-x$ и уравнение имеет вид: $-x^2-7x+10=0$ или $x^2+7x-10=0$. Найдем его корни $x_{3,4}=\dfrac{-7\pm\sqrt{49+40}}{2}=$ $=\dfrac{-7\pm\sqrt{89}}{2}$. Условию $x<0$ удовлетворяет только корень $x_3=\dfrac{-7-\sqrt{89}}{2}$.

Итак, данное уравнение имеет три корня $x_1=2$, $x_2=5$ и $x_3=\dfrac{-7-\sqrt{89}}{2}$.

IV. Контрольные вопросы

1. Напишите формулу корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.
2. Выведите формулу корней квадратного уравнения.
3. Сколько корней имеет квадратное уравнение?

V. Задание на уроке

№ 25.9 (а, б); 25.16 (в, г); 25.19 (а, б); 25.20 (в, г); 25.23; 25.27; 25.32; 25.37 (а, б); 25.38 (б, в); 25.45 (а, г); 25.46 (а, б); 25.48 (а, г).

VI. Задание на дом

№ 25.10 (а, б); 25.17 (в, г); 25.19 (в, г); 25.20 (а, б); 25.25; 25.29; 25.33; 25.37 (в, г); 25.38 (а, г); 25.45 (б, в); 25.46 (в, г); 25.48 (б, в).

VII. Творческие задания

1. Докажите, что при всех значениях параметра a квадратное уравнение имеет два различных корня:

а) $3x^2-4ax-2=0$;

б) $2x^2+5ax-3=0$;

в) $2x^2+3ax-a^2-1=0$;

г) $4x^2-5ax-2a^2-3=0$.

Указание: найдите дискриминант уравнения и сравните его с нулем.

2. Решите уравнение при всех значениях параметра a:

а) $x^2-5ax+6a^2=0$;

б) $x^2+ax-2a^2=0$;

в) $6x^2+ax-a^2=0$;

г) $8x^2-2ax-a^2=0$;

д) $x^2+(a-1)x-a=0$;

е) $x^2-(2a+3)x+6a=0$;

ж) $x^2-2ax+a^2-1=0$;

з) $x^2-4ax+4a^2-9=0$;

и) $x^2+(a+1)x-2a^2+2a=0$;

к) $x^2+2(a+2)x+12a-3a^2=0$;

л) $ax^2-(a+1)x+1=0$;

м) $(a+1)x^2-2x+1-a=0$.

Ответы: а) $x_1=2a$, $x_2=3a$; б) $x_1=-2a$, $x_2=a$; в) $x_1=-\frac{a}{2}$, $x_2=\frac{a}{3}$; г) $x_1=-\frac{a}{4}$, $x_2=\frac{a}{2}$; д) $x_1=-a$, $x_2=1$; е) $x_1=2a$, $x_2=3$; ж) $x_1=a-1$, $x_2=a+1$; з) $x_1=2a-3$, $x_2=2a+3$; и) $x_1=-2a$, $x_2=a-1$; к) $x_1=-3a$, $x_2=a-4$; л) при $a\neq 0$ $x_1=1$ и $x_2=\frac{1}{a}$, при $a=0$ $x=1$; м) при $a\neq -1$ $x_1=1$ и $x_2=\frac{1-a}{1+a}$, при $a=-1$ $x=1$.

Указание: использовать формулу корней квадратного уравнения.

3. Один из корней квадратного уравнения равен x_1. Найдите второй корень уравнения и значение параметра a.

а) $x^2-ax+6=0$, $x_1=2$;

б) $x^2+ax-3=0$, $x_1=3$;

в) $ax^2+2(2-a)x-1=0,\ x_1=1;$

г) $ax^2+3x-a=0,\ x_1=-2.$

Ответы: а) $a=5,\ x_2=3$; б) $a=-2,\ x_2=-1$; в) $a=3,\ x_2=-\frac{1}{3}$; г) $a=2,\ x_2=\frac{1}{2}$.

Указание: подставьте корень x_1 в уравнение и определите значение параметра a, потом решите уравнение и найдите корень x_2.

4. Решите уравнение:

а) $x^2+6|x|-7=0;$

б) $x^2-|x|-6=0;$

в) $|x^2-5x+4|=4;$

г) $|x^2+3x+2|=2;$

д) $|x^2+x-3|=x;$

е) $|x^2-x-8|=-x;$

ж) $|x^2+4x+3|=|x+1|;$

з) $|x^2-4x+10|=|x+4|;$

и) $x|x|-7x+12=0;$

к) $x|x|-4x+3=0.$

Ответы: а) $x_1=-1,\ x_2=1$; б) $x_1=-3,\ x_2=3$; в) $x_1=0,\ x_2=5$; г) $x_1=0,\ x_2=-3$; д) $x_1=1,\ x_2=\sqrt{3}$; е) $x_1=-2\sqrt{2},\ x_2=-2$; ж) $x_1=-1,\ x_2=-2,\ x_3=-4$; з) $x_1=2,\ x_2=3$; и) $x_1=3,\ x_2=4,\ x_3=\frac{-7\pm\sqrt{97}}{2}$; к) $x_1=1,\ x_2=3,\ x_3=-2-\sqrt{7}$.

VIII. Подведение итогов урока

§ 26. Рациональные уравнения

Уроки 62–63. Решение рациональных уравнений

Цель: рассмотреть основные способы решения рациональных уравнений.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Напишите формулу корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

2. Решите уравнение:

а) $9x^2+24x+16=0$;

б) $3x^2-8x+7=0$;

в) $3x^2+16x-12=0$;

г) $x^2-x+a-a^2=0$;

д) $|x^2+7x+8|=8$.

Вариант 2

1. Сколько корней может иметь квадратное уравнение в зависимости от дискриминанта D.

2. Решите уравнение:

а) $16x^2+24x+9=0$;

б) $2x^2+7x-4=0$;

в) $4x^2+11x+9=0$;

г) $x^2-x-4a^2-2a=0$;

д) $|x^2+5x+6|=6$.

III. Изучение нового материала

Уравнение вида $r(x)=0$ (где $r(x)$ – рациональное выражение) называют рациональным уравнением.

Пример 1

Уравнения:

а) $\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{x^2-x+1}{3}=0;$

б) $x^2-\dfrac{5+x}{x}=x+7;$

в) $\dfrac{2x-1}{x^2-1}=\dfrac{3x+2}{x+1}$ являются рациональными.

1. Алгоритм решения рационального уравнения

Основной способ решения рациональных уравнений состоит в **преобразовании их в простейшие целые уравнения**: линейные или квадратные.

Пример 2

Решим рациональное уравнение $\dfrac{x^2-6x+8}{2-x}=1.$

Умножим обе части уравнения на знаменатель $2-x$ (при условии, что $2-x\neq 0$ (т. е. $x\neq 2$)) и по свойству уравнений получим квадратное уравнение $x^2-6x+8=2-x$. Перенесем все члены в левую часть и получим уравнение $x^2-5x+6=0$ (при условии, что $x\neq 2$). Корни этого квадратного уравнения $x_1=2$ и $x_2=3$. Однако корнем данного уравнения является только корень $x=3$.

Пример 3

Решим дробное рациональное уравнение $\dfrac{2x-8}{x-5}+\dfrac{10}{(x-5)(x+5)}=$
$=\dfrac{x+4}{x+5}.$

Общий знаменатель дробей, входящих в уравнение, равен $(x-5)(x+5)$. Умножим все члены уравнения на это выражение (при условии, что $(x-5)(x+5)\neq 0$ (т. е. $x=\pm 5$)) и получим равносильное уравнение $(2x-8)(x+5)+10=(x+4)(x-5)$, или $2x^2+10x-8x-40+10=x^2+4x-5x-20$, или $2x^2+2x-30=x^2-x-20$. Перенесем все члены уравнения в левую часть и приведем подобные члены. Получаем квадратное уравнение $x^2+3x-10=0$. Корни этого уравнения $x_1=-5$ и $x_2=2$. Условию $x\neq\pm 5$ удовлетворяет только корень $x=2$. Поэтому корень данного уравнения $x=2$.

Пример 4

Решим дробное рациональное уравнение $\dfrac{x+3}{4x^2-9}-\dfrac{3-x}{4x^2+12x+9}=$ $=\dfrac{2}{2x-3}$.

Разложим знаменатели дробей, входящих в уравнение, на множители $\dfrac{x+3}{(2x-3)(2x+3)}-\dfrac{3-x}{(2x+3)^2}=\dfrac{2}{2x-3}$. Общий знаменатель этих дробей $(2x-3)(2x+3)^2$. Умножим все члены данного уравнения на это выражение (при условии, что оно не равно нулю (т. е. $x \neq \pm 1{,}5$)) и получим равносильное уравнение $(x+3)(2x+3)-(3-x)(2x-3)=$ $=2(2x+3)^2$, или $2x^2+3x+6x+9-6x+9+2x^2-3x=8x^2+24x+18$, или $4x^2+18=8x^2+24x+18$. Перенесем все члены уравнения в правую часть и приведем подобные члены. Получаем равносильное неполное квадратное уравнение $0 = 4x^2 + 24x$ или $0 = x(x + 6)$. Оба корня этого уравнения $x_1 = 0$ и $x_2 = -6$ удовлетворяют условию $x \neq \pm 1{,}5$ и являются корнями данного уравнения.

Отметим, что корни линейного или квадратного уравнений, при которых хотя бы один из знаменателей рационального уравнения обращается в нуль, называют **посторонними**. Естественно, корнями данного рационального уравнения они не являются и их надо **исключить** (примеры 2, 3).

Приведем **алгоритм решения рационального уравнения:**

1. Разложить все знаменатели дробей, входящих в уравнение, на множители.

2. Найти общий знаменатель этих дробей.

3. Умножить все члены данного уравнения на общий знаменатель.

4. Решить получившееся целое уравнение.

5. Из корней этого уравнения исключить те, которые обращают в нуль общий знаменатель данного уравнения.

Достаточно часто встречаются рациональные уравнения, содержащие знаки модуля или параметры.

Пример 5

Решим уравнение $\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|=2$.

Если модуль некоторой величины равен 2, то сама величина равна ± 2. Рассмотрим эти случаи.

а) $\dfrac{x+1}{x-1}=2$. Умножим обе части этого уравнения на знаменатель $x-1$ и получим $x+1=2(x-1)$ или $x+1=2x-2$, откуда $x=3$. Заметим, что для такого значения x знаменатель дроби $x-1\neq 0$. Поэтому $x=3$ – корень данного уравнения.

б) $\dfrac{x+1}{x-1}=-2$. Опять умножим обе части уравнения на знаменатель $x-1$ и получим: $x+1=-2(x-1)$, или $x+1=-2x+2$, или $3x=1$, откуда $x=\dfrac{1}{3}$. При этом знаменатель дроби $x-1\neq 0$. Значит, $x=\dfrac{1}{3}$ – также корень данного уравнения.

Пример 6

Решим уравнение $\dfrac{x^2-3x}{|x-2|}=2$.

Используя определение модуля, раскроем знак модуля, рассмотрев два случая.

а) Если $x-2>0$ (т. е. $x>2$), то $|x-2|=x-2$ и уравнение имеет вид $\dfrac{x^2-3x}{x-2}=2$. Умножим обе части этого уравнения на $x-2$ и получим квадратное уравнение $x^2-3x=2(x-2)$ или $x^2-5x+4=0$. Корни этого уравнения $x_1=1$ и $x_2=4$. Условию $x>2$ удовлетворяет только корень $x=4$. Поэтому $x=4$ – корень данного уравнения.

б) Если $x-2<0$ (т. е. $x<2$), то $|x-2|=-(x-2)=2-x$ и уравнение имеет вид $\dfrac{x^2-3x}{2-x}=2$. Умножим обе части этого уравнения на $2-x$ и получим квадратное уравнение $x^2-3x=2(2-x)$ или $x^2-x-4=0$. Корни этого уравнения $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}$. Условию $x<2$ удовлетворяет только корень $x=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}$. Поэтому $x=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}$ – также корень данного уравнения.

Пример 7

Решим уравнение $\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{6}{x-a}+1$.

Умножим все члены уравнения на общий знаменатель дробей $(x+2)(x-a)$ (при условии, что $x+2\neq 0$ и $x-a\neq 0$) и получим:

$x(x-a)=6(x+2)+(x+2)(x-a)$ или $x^2-ax=6x+12+x^2-ax+2x-2a.$ Перенесем все члены уравнения в правую часть, приведем подобные члены и получим линейное уравнение $0 = 8x + 12 - 2a$. Решим это уравнение. Имеем: $a - 6 = 4x$, откуда $x=\dfrac{a-6}{4}$.

Так как параметр a может принимать любые значения, то найденное решение $x=\dfrac{a-6}{4}$ может оказаться таким, что $x + 2 = 0$ или $x - a = 0$. Найдем, при каких значениях параметра a выполняется хотя бы одно из этих условий.

а) $x+2=\dfrac{a-6}{4}+2=\dfrac{a+2}{4}$. Эта величина $\dfrac{a+2}{4}=0$ при $a=-2$.

б) $x-a=\dfrac{a-6}{4}-a=\dfrac{-3a-6}{4}=\dfrac{-3(a+2)}{4}$. Величина $\dfrac{-3(a+2)}{4}=0$ при $a=-2$.

Итак, при $a \neq -2$ уравнение имеет корень $x=\dfrac{a-6}{4}$, при $a = -2$ уравнение корней не имеет (т. к. при этом знаменатели дробей в данном уравнении равны нулю).

2. Решение рациональных уравнений методом введения новой переменной

Очень часто для решения уравнений используется **способ замены переменной**. Если в уравнение неизвестная входит в виде одного и того же алгебраического выражения, то его удобно рассматривать в качестве новой переменной. Сначала уравнение решают для новой переменной. Найдя ее значения, возвращаются к старой неизвестной и вновь решают уравнения, но уже для старой переменной.

Пример 8

Решим уравнение $\dfrac{x^2+x-5}{x}+\dfrac{3x}{x^2+x-5}+4=0.$

В уравнение неизвестная x входит в виде выражения $\dfrac{x^2+x-5}{x}$ или обратного выражения $\dfrac{x}{x^2+x-5}$. Поэтому введем новую переменную $y=\dfrac{x^2+x-5}{x}$. Тогда данное уравнение имеет вид $y+\dfrac{3}{y}+4=0.$

Это уравнение легко сводится к квадратному $y^2 + 4y + 3 = 0$, которое имеет корни $y_1 = -1$ и $y_2 = -3$.

Вернемся теперь к старой неизвестной. Получаем два уравнения:

а) $\dfrac{x^2+x-5}{x} = -1$ или $x^2 + 2x - 5 = 0$. Корни этого уравнения $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{6}$.

б) $\dfrac{x^2+x-5}{x} = -3$ или $x^2 + 4x - 5 = 0$. Корни этого уравнения $x_3 = -5$ и $x_4 = 1$.

Пример 9

Решим уравнение $2\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - 7\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + 9 = 0$.

В этой задаче замена переменной не столь очевидна, как в предыдущем примере. Но, учитывая, что группы слагаемых зависят от x в первой степени и от x во второй степени, введем новую переменную $y = x + \dfrac{1}{x}$. Возведем это выражение в квадрат: $y^2 = x^2 + 2x\cdot\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ и выразим сумму $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = y^2 - 2$. Тогда данное уравнение имеет вид $2(y^2 - 2) - 7y + 9 = 0$ или $2y^2 - 7y + 5 = 0$. Корни этого уравнения $y_1 = 1$ и $y_2 = \dfrac{5}{2}$.

Вернемся теперь к старой неизвестной. Получаем два уравнения:

а) $x + \dfrac{1}{x} = 1$ или $x^2 - x + 1 = 0$. Это уравнение корней не имеет.

б) $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{2}$ или $2x^2 - 5x + 2 = 0$. Корни этого уравнения $x_1 = 2$ и $x_2 = \dfrac{1}{2}$.

IV. Задание на уроке

26.4 (а); 26.6 (а, в); 26.8 (б); 26.11 (а, б); 26.12; 26.15 (а); 26.17 (б); 26.23 (а, б); 26.26 (б, в).

V. Задание на дом

№ 26.4 (б); 26.6 (б, г); 26.8 (а); 26.11 (в, г); 26.13; 26.15 (б); 26.17 (г); 26.23 (в, г); 26.27 (а, б).

VI. Творческие задания

1. Решите уравнение:

а) $\left|\frac{3x-1}{2x+5}\right|=2;$ б) $\left|\frac{2x-1}{3x+2}\right|=3;$

в) $\left|\frac{x^2-3x}{x+1}\right|=2x-1;$ г) $\left|\frac{5x^2-2x}{2x+1}\right|=3x-2;$

д) $\frac{|x-2|+1}{2x+1}=-1;$ е) $\frac{|3x+4|+1}{x+1}=-2;$

ж) $\frac{|x-3|}{3-x}=-1;$ з) $\frac{|x-2|}{x-2}=-1.$

Ответы: а) $x_1=-11$ и $x_2=-\frac{9}{7}$; б) $x_1=-1$ и $x_2=-\frac{5}{11}$; в) $x=1$; г) $x=1$; д) $x=-4$; е) $x_1=-\frac{6}{5}$ и $x_2=-2$; ж) $x>3$; з) $x<2$.

2. При всех значениях параметра a решите уравнение:

а) $\frac{a+2}{x-2}=a-1;$ б) $\frac{1}{x}=\frac{a-1}{a+x};$

в) $\frac{a}{x}-6=\frac{2}{x};$ г) $\frac{1}{x-1}=\frac{a}{x+1};$

д) $\frac{1-x}{1+x}=\frac{a-1}{a+1};$ е) $\frac{x-1}{x+1}=\frac{a+1}{a-1};$

ж) $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x-a}{x+a}=\frac{10}{3};$ з) $\frac{3x-2a}{x+a}+\frac{x+a}{3x-2a}=2\frac{1}{2}.$

Ответы: а) при $a\neq-2$ и $a\neq1$ $x=\frac{3a}{a-1}$, при $a=-2$ или $a=1$ решений нет; б) при $a\neq0$, $a\neq1$ и $a\neq2$ $x=\frac{a}{a-2}$, при $a=0$ или $a=1$ или $a=2$ решений нет; в) при $a\neq2$ $x=\frac{a-2}{6}$, при $a=2$ решений нет; г) при $a\neq0$ $x=\frac{a+1}{a-1}$, при $a=0$ решений нет; д) при $a\neq-1$ и $a\neq0$ $x=\frac{1}{a}$, при $a=-1$ или $a=0$ решений нет; е) при $a\neq1$ $x=-a$, при $a = 1$ решений нет; ж) при $a \neq 0$ $x_1 = -2a$ и $x_2 = 2a$, при $a = 0$ решений нет; з) при $a \neq 0$ $x_1 = -4a$ и $x_2 = a$, при $a = 0$ решений нет.

VII. Подведение итогов урока

§ 27. Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций

Уроки 64–66. Решение задач с помощью рациональных уравнений

Цель: использовать рациональные уравнения для решения текстовых задач.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

Решите уравнение:

1) $\frac{x^2-5x+9}{x-6}=\frac{2x+3}{x-6}$; 2) $\frac{3(x-1)}{3x-2}+\frac{2(x+3)}{3x+2}=2$;

3) $\frac{|2x-1|+x+1}{4x-2}=1$; 4) $\frac{a}{a+x}=\frac{3a}{x}$.

Вариант 2

Решите уравнение:

1) $\frac{x^2-2x+8}{x-3}=\frac{3x+2}{x-3}$; 2) $\frac{4x+7}{2x-3}-\frac{x-3}{2x+3}=1$;

3) $\frac{|3x+2|+x+2}{x+3}=2$; 4) $\frac{2a}{a-x}=\frac{5a}{x}$.

III. Изучение нового материала

Решение многих текстовых задач (особенно на движение и совместную работу) приводит к рациональным уравнениям.

Пример 1

Грузовик остановился для заправки горючим на 24 мин. Увеличив свою скорость на 10 км/ч, он наверстал потерянное время на пути в 80 км. С какой скоростью двигался грузовик на этом пути?

Пусть первоначальная скорость грузовика x км/ч. Тогда 80 км он проехал бы за время $\frac{80}{x}$ ч. На самом деле грузовик сначала задержался на 24 мин (или $\frac{24}{60}$ ч $=\frac{2}{5}$ ч). Потом он увеличил скорость на 10 км/ч и стал двигаться со скоростью $(x + 10)$ км/ч. Поэтому путь в 80 км он проехал за время $\frac{80}{x+10}$ ч и компенсировал потерянное время. Получаем рациональное уравнение $\frac{80}{x}=\frac{2}{5}+\frac{80}{x+10}$. Решим его.

Умножим все члены уравнения на общий знаменатель дробей $5x(x + 10)$ и получим: $80 \cdot 5(x + 10) = 2x(x + 10) + 80 \cdot 5x$, или $400x + 4000 = 2x^2 + 20x + 400x$, или $0 = x^2 + 10x - 2000$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = -50$ и $x_2 = 40$. Очевидно, что (по смыслу задачи) подходит только корень $x = 40$. Тогда грузовик двигался со скоростью $40 + 10 = 50$ (км/ч).

Пример 2

Один кран наполняет бассейн на 6 ч быстрее другого. Два крана, работая вместе, наполняют бассейн за 4 ч. За сколько часов может наполнить бассейн каждый кран, работая отдельно?

Пусть один кран наполнит бассейн за x ч, тогда другой кран – за $(x + 6)$ ч. Пусть объем бассейна составляет V л. Тогда первый кран в час наливает в бассейн $\frac{V}{x}$ л воды, второй кран наливает в час $\frac{V}{x+6}$ л. Вместе в час они наливают $\left(\frac{V}{x}+\frac{V}{x+6}\right)$ л. С другой стороны эти краны наполняют бассейн за 4 ч и в час наливают в него $\frac{V}{4}$ л воды. Поэтому получаем рациональное уравнение $\frac{V}{x}+\frac{V}{x+6}=\frac{V}{4}$. Решим его.

Разделим все члены уравнения на V (очевидно, что $V \neq 0$) и получим: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}=\frac{1}{4}$. Умножим обе части уравнения на общий знаменатель дробей $4x(x + 6)$ и получим: $4(x + 6) + 4x = x(x + 6)$, или $4x + 24 + 4x = x^2 + 6x$, или $0 = x^2 - 2x - 24$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = 6$ и $x_2 = -4$ (не подходит).

Итак, один кран заполнит бассейн за 6 ч, тогда другой кран – за $6 + 6 = 12$ (ч).

Пример 3

Знаменатель несократимой обыкновенной дроби больше ее числителя на 5. Если и числитель и знаменатель увеличить на 2, то полученная дробь будет больше первоначальной на $\frac{1}{8}$. Найдите первоначальную дробь.

Пусть числитель данной дроби равен x, тогда ее знаменатель равен $x + 5$ и дробь имеет вид $\frac{x}{x+5}$. После увеличения на 2 числитель дроби стал равен $x + 2$, знаменатель $x + 7$. Полученная дробь имеет вид $\frac{x+2}{x+7}$. По условию новая дробь больше данной на $\frac{1}{8}$. Поэтому имеем рациональное уравнение $\frac{x+2}{x+7}-\frac{x}{x+5}=\frac{1}{8}$. Решим его.

Умножим все члены уравнения на общий знаменатель дробей $8(x + 7)(x + 5)$ и получим: $8(x + 2)(x + 5) - 8x(x + 7) = (x + 7)(x + 5)$, или $8x^2 + 56x + 80 - 8x^2 - 56x = x^2 + 12x + 35$, или $0 = x^2 + 12x - 45$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = 3$ и $x_2 = -15$ (не подходит). Итак, числитель дроби 3, ее знаменатель равен $3 + 5 = 8$. Тогда данная дробь равна $\frac{3}{8}$.

IV. Задание на уроке

№ 27.1; 27.8; 27.14; 27.23; 27.27; 27.29; 27.33; 27.40; 27.44.

V. Задание на дом

№ 27.2; 27.9; 27.15; 27.24; 27.28; 27.30; 27.34; 27.41; 27.45.

VI. Подведение итогов урока

§ 28. Еще одна формула корней квадратного уравнения

Уроки 67–68. Формула корней квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом

Цель: рассмотреть частный случай формулы корней квадратного уравнения.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Катер прошел 46 км по течению реки и 17 км против течения, затратив на весь путь 3 ч. Найти собственную скорость катера, если скорость течения реки 3 км/ч.

2. Знаменатель несократимой обыкновенной дроби на 7 больше ее числителя. Если числитель дроби увеличить на 3, а ее знаменатель уменьшить на 3, то полученная дробь будет на $\frac{11}{18}$ больше данной дроби. Найдите данную дробь.

Вариант 2

1. Катер прошел 20 км по течению реки и 32 км против течения, затратив на весь путь 3 ч. Найти собственную скорость катера, если скорость течения реки 2 км/ч.

2. Знаменатель несократимой обыкновенной дроби на 5 больше ее числителя. Если числитель дроби увеличить на 2, а ее знаменатель уменьшить на 2, то полученная дробь будет на $\frac{18}{35}$ больше данной дроби. Найдите данную дробь.

III. Изучение нового материала

Для квадратных уравнений, у которых **второй коэффициент** является **четным** числом, формулу корней можно записать в более удобном виде. Пусть квадратное уравнение

$ax^2+bx+c=0$ имеет четный второй коэффициент, т. е. $b = 2k$ (т. е. уравнение имеет вид $ax^2+2kx+c=0$). Найдем его дискриминант $D=b^2-4ac=(2k)^2-4ac=4(k^2-ac)$. Очевидно, что число корней уравнения зависит от знака выражения $k^2 - ac$. Обозначим это выражение D_1 (т. е. $D_1 = k^2 - ac$), тогда $D = 4D_1$.

Если $D_1 \geq 0$ (тогда и $D \geq 0$), то по формуле корней квадратного уравнения получим $x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-2k\pm\sqrt{4D_1}}{2a}=\frac{-2k\pm2\sqrt{D_1}}{2a}=\frac{-k\pm\sqrt{D_1}}{a}$,

т. е. $x=\frac{-k\pm\sqrt{D_1}}{a}$, **где $D_1 = k^2 - ac$ (1)**. Если $D_1 < 0$ (тогда и $D < 0$), то уравнение корней не имеет.

Пример 1

Решим уравнение $3x^2 - 4x + 1 = 0$.

В данном уравнении коэффициенты $a = 3$, $b = -4$, $c = 1$. Так как второй коэффициент четный (т. е. $b = 2k$, где $k = -2$), то найдем величину $D_1 = k^2 - ac = (-2)^2 - 3 \cdot 1 = 4 - 3 = 1$ и используем формулу корней (1). Получаем $x=\frac{-k\pm\sqrt{D_1}}{a}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{1}}{3}=\frac{2\pm1}{3}$, т. е. $x_1=\frac{2+1}{3}=1$ и $x_2=\frac{2-1}{3}=\frac{1}{3}$.

Ответ: $x_1 = 1$ и $x_2=\frac{1}{3}$.

Для случая $a=1$ формула (1) становится еще проще $x=-k\pm\sqrt{k^2-c}$ (2).

Пример 2

Решим уравнение $x^2 + 6x + 3 = 0$.

Для данного уравнения коэффициенты $a = 1$, $b = 6$, $c = 3$. Так как второй коэффициент четный (т. е. $b = 2k$, где $k = 3$) и $a = 1$, то используем формулу (2) и получим $x=-k\pm\sqrt{k^2-c}=$ $=-3\pm\sqrt{3^2-3}=-3\pm\sqrt{6}$.

В заключении упорядочим формулы корней квадратного уравнения.

Уравнение	Формула корней	Примечание
$ax^2+bx+c=0$ (1)	$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	Общий вид уравнения
$ax^2+2kx+c=0$ (2)	$x=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}$	Частный случай (1) при $b=2k$
$x^2+2kx+c=0$ (3)	$x=-k\pm\sqrt{k^2-c}$	Частный случай (2) при $a=1$

Помимо общей формулы для корней уравнения (1) желательно помнить и частные случаи для уравнений (2) и (3). Тем самым можно существенно упростить вычисления и сэкономить на них время.

IV. Задание на уроке

№ 28.2 (а, б); 28.3 (в, г); 28.4 (а, б); 28.6 (в, г); 27.7; 28.1; 28.20 (а); 28.21 (в); 28.22 (а, б); 28.23 (а); 28.24; 28.26.

V. Задание на дом

№ 28.2 (в, г); 28.3 (а, б); 28.4 (в, г); 28.6 (а, б); 28.8; 28.12; 28.20 (б); 28.21 (г); 28.22 (в, г); 28.23 (б); 28.25; 28.27.

VI. Подведение итогов урока

§ 29. Теорема Виета

Уроки 69–70. Сумма и произведение корней квадратного уравнения

Цель: обсудить теорему Виета и ее применение.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Напишите формулу корней квадратного уравнения $ax^2+2kx+c=0$.
2. Решите уравнение:
   а) $x^2+14x-15=0$;
   б) $7x^2+22x-29=0$.

Вариант 2

1. Напишите формулу корней квадратного уравнения $x^2+2kx+c=0$.
2. Решите уравнение:
   а) $x^2+18x-19=0$;
   б) $9x^2-24x+15=0$.

III. Изучение нового материала

Помимо формул корней квадратного уравнения необходимо обсудить другие **утверждения** (теоремы) **о корнях квадратного уравнения**. Такие теоремы часто используются для решения задач.

Теорема 1 (теорема Виета). Если x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, то сумма корней равна $-\frac{b}{a}$, а произведение корней равно $\frac{c}{a}$, т. е. $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$.

Докажем это утверждение. Корни x_1 и x_2 вычисляются по формулам $x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ и $x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, где $D=b^2-4ac$ – дискриминант уравнения. Найдем комбинации корней: $x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=$ $=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$ и $x_1\cdot x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{(-b)^2-(\sqrt{D})^2}{4a^2}=\frac{b^2-D}{4a^2}=$ $=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$. Таким образом, теорема доказана.

Пример 1

Пусть уравнение $3x^2-7x+1=0$ имеет корни x_1 и x_2. Найдем:

а) сумму корней x_1+x_2;

б) произведение корней x_1x_2;

в) сумму обратных величин корней $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$;

г) сумму квадратов корней $x_1^2+x_2^2$;

д) сумму кубов корней $x_1^3 + x_2^3$;

е) модуль разности корней $|x_1 - x_2|$.

Найдем дискриминант данного уравнения $D = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 37$. Так как $D > 0$, то уравнение имеет два различных корня. Так как дискриминант не является квадратом натурального числа, то корни уравнения x_1 и x_2 – иррациональные числа. Поэтому прямое и непосредственное вычисление пунктов а–е затруднительно. Следовательно, для вычислений используем теорему Виета.

Сумму и произведение корней найдем сразу:

а) $x_1 + x_2 = -\left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$ и б) $x_1 x_2 = \frac{1}{3}$.

Для вычисления остальных пунктов надо выразить требуемые комбинации корней через их сумму и произведение.

в) Приведем дроби к общему знаменателю $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} =$

$$= \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{1}{3}} = 7.$$

г) Используем формулу квадрата суммы: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 =$

$$= \left(\frac{7}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{49}{9} - \frac{2}{3} = \frac{49 - 6}{9} = \frac{43}{9} = 4\frac{7}{9}.$$

д) Применим формулу суммы кубов: $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) =$ $= (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2)$. Подставим в это выражение значения величин $x_1 + x_2$, $x_1^2 + x_2^2$ и $x_1 x_2$. Получаем: $x_1^3 + x_2^3 = \frac{7}{3} \cdot \left(\frac{43}{9} - \frac{1}{3}\right) =$

$$= \frac{7}{3} \cdot \frac{40}{9} = \frac{280}{27} = 10\frac{10}{27}.$$

е) Используем свойство квадратного корня и формулу квадрата разности: $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2}$. Подставим в это выражение значения величин $x_1^2 + x_2^2$ и $x_1 x_2$ и получим: $|x_1 - x_2| = \sqrt{\frac{43}{9} - 2 \cdot \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{37}{9}} = \frac{\sqrt{37}}{3}$.

Пример 2

Не решая уравнения $7x^2 + 18x + 3 = 0$, определим знаки его корней.

Дискриминант этого уравнения $D = 18^2 - 4 \cdot 7 \cdot 3 = 240$. Так как $D > 0$, то данное уравнение имеет два различных корня. Определим знаки этих корней. Используя теорему Виета, имеем: $x_1 + x_2 = -\dfrac{18}{7}$ и $x_1x_2 = \dfrac{3}{7}$. Так как $x_1x_2 > 0$, то числа x_1 и x_2 имеют одинаковые знаки (или оба положительные или оба отрицательные). Так как при этом $x_1 + x_2 < 0$, то корни x_1 и x_2 отрицательные.

Пример 3

Решим уравнение $x^2 - 4x + a = 0$, если его корни x_1 и x_2 связаны равенством $2x_1 + x_2 = 3$. Найдем значение параметра a.

Сначала найдем корни данного уравнения. Для этого используем теорему Виета $x_1 + x_2 = 4$ и данное равенство $2x_1 + x_2 = 3$. Решим систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$ методом сложения. Вычтем из первого уравнения второе: $2x_1 + x_2 - x_1 - x_2 = 3 - 4$, откуда $x_1 = -1$. Из второго уравнения находим $x_2 = 4 - x_1 = 4 - (-1) = 5$.

Теперь определим значение параметра a. Для этого еще раз используем теорему Виета. Получаем $a = x_1x_2 = -1 \cdot 5 = -5$. Итак, $x_1 = -1$ и $x_2 = 5$, $a = -5$.

Пример 4

При каком значении параметра a сумма корней уравнения $x^2 - (a^2 - 6a)x - a^2 - 1 = 0$ имеет наименьшую величину. Найдите эту величину.

Найдем дискриминант данного уравнения $D = (a^2 - 6a)^2 + {}$ $+ 4(a^2 + 1)$. Очевидно, что при любых значениях a дискриминант положительный. Поэтому уравнение имеет два различных корня x_1 и x_2. По теореме Виета сумма этих корней $x_1 + x_2 = a^2 - 6a$. Преобразуем это выражение, выделив квадрат двучлена: $x_1 + x_2 = (a^2 - 6a + 9) - 9 = (a - 3)^2 - 9$. Видно, что сумма корней состоит из неотрицательного слагаемого $(a - 3)^2$ и отрицательного числа -9. Поэтому она будет наименьшей, если слагаемое $(a - 3)^2$

самое маленькое, т. е. $(a-3)^2=0$, откуда $a = 3$. Итак, при $a = 3$ сумма корней данного уравнения наименьшая и равна –9.

Особенно простой вид теорема Виета имеет **для приведенного** квадратного **уравнения** $x^2+px+q=0$. В этом случае $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1x_2 = q$.

Разумеется, теорема Виета справедлива и в том случае, когда **дискриминант** квадратного уравнения D **равен нулю.** В этом случае считают, что уравнение имеет **два одинаковых корня** (не случайно в случае $D = 0$ мы подчеркивали, что уравнение имеет два одинаковых корня, а не единственный корень).

Теорема 2. Если x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена, ax^2+bx+c, то справедливо тождество $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Докажем эту теорему. Запишем квадратный трехчлен в виде $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$. Учтем теорему Виета: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ и $x_1x_2=\frac{c}{a}$. Поэтому равенство принимает следующий вид:

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2)=a(x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2)=$$
$$=a((x^2-x_1x)+(-x_2x+x_1x_2))=a(x(x-x_1)-x_2(x-x_1))=$$
$$=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Таким образом, знание корней квадратного трехчлена позволяет легко разложить его на множители.

Пример 5

Разложим на множители квадратный трехчлен:

а) $2x^2 + 5x - 3$;

б) $25x^2 - 20x + 4$.

Найдем корни данных квадратных трехчленов.

а) Трехчлен $2x^2 + 5x - 3$ имеет корни $x_1=\frac{1}{2}$ и $x_2 = -3$. Разложим выражение на множители: $2x^2+5x-3=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-(-3))$. Обычно вносят множитель в скобки. Тогда получим: $2x^2+5x-3=$ $=(2x-1)(x+3)$.

б) Трехчлен $25x^2 - 20x + 4$ имеет единственный корень $x = \frac{2}{5}$ (точнее два одинаковых корня $x_1 = x_2 = \frac{2}{5}$). Разложим выражение на множители: $25x^2 - 20x + 4 = 25\left(x - \frac{2}{5}\right)\left(x - \frac{2}{5}\right) = 25\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 =$ $= (5x-2)^2$.

Заметим, что задачу можно решить проще, если увидеть, что выражение $25x^2 - 20x + 4$ является полным квадратом разности $(5x-2)^2$.

Теорему 2 дополняют еще две теоремы.

Теорема 3. Если квадратный трехчлен раскладывается на линейные множители, то он имеет корни.

Докажем это утверждение. Пусть квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ разложен на линейные множители, т. е. $ax^2 + bx + c =$ $= (kx + l)(mx + n)$, или $ax^2 + bx + c = k\left(x + \frac{l}{k}\right)m\left(x + \frac{n}{m}\right)$, или $ax^2 + bx + c = km\left(x + \frac{l}{k}\right)\left(x + \frac{n}{m}\right)$. Из этой записи следует, что корни квадратного трехчлена $x_1 = -\frac{l}{k}$ и $x_2 = -\frac{n}{m}$.

Теорема 4. Если квадратный трехчлен не имеет корней, то его нельзя разложить на линейные множители.

Докажем методом от противного. Предположим, что квадратный трехчлен разложен на линейные множители, т. е. $ax^2 + bx + c =$ $= (kx + l)(mx + n)$. Но тогда по теореме 3 квадратный трехчлен имеет корни, что противоречит условию теоремы. Это означает, что наше предположение неверно и квадратный трехчлен нельзя разложить на линейные множители.

Пример 6

Для квадратного трехчлена $2x^2 - 9x + 23$ дискриминант $D = (-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 23 = 81 - 178 = -97 < 0$. Поэтому такой трехчлен не имеет корней и не может быть разложен на множители.

Теоремы 2–4 широко используются, например, при сокращении дробей.

Пример 7

Сократим дробь $\dfrac{6x^2+x-1}{10x^2+7x+1}$.

Разложим на множители числитель и знаменатель дроби и сократим ее. Корни числителя $6x^2 + x - 1$ равны $\dfrac{1}{3}$ и $-\dfrac{1}{2}$, поэтому $6x^2+x-1=6\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$. Корни знаменателя $10x^2 + 7x + 1$ равны $-\dfrac{1}{5}$ и $-\dfrac{1}{2}$. Тогда получаем: $10x^2+7x+1=10\left(x+\dfrac{1}{5}\right)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$.

Данная дробь имеет вид: $\dfrac{6x^2+x-1}{10x^2+7x+1}=\dfrac{6\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)}{10\left(x+\dfrac{1}{5}\right)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)}=$

$$=\frac{3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)}{5\left(x+\dfrac{1}{5}\right)}=\frac{3x-1}{5x+1}.$$

И, наконец, обсудим еще одно важное утверждение.

Теорема 5. Если для чисел x_1 и x_2 выполнимы равенства $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1x_2 = q$, то эти числа – корни приведенного квадратного уравнения $x^2+px+q=0$.

Докажем теорему. Так как $p=-(x_1+x_2)$ и $q=x_1x_2$, то квадратный трехчлен x^2+px+q имеет следующий вид: $x^2+px+q=$

$$=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2=(x^2-x_1x)+(-x_2x+x_1x_2)=$$
$$=x(x-x_1)-x_2(x-x_1)=(x-x_1)(x-x_2).$$

Эта запись означает, что x_1 и x_2 – корни многочлена $(x-x_1)(x-x_2)$, т. е. корни приведенного квадратного уравнения $x^2+px+q=0$.

Такая теорема полезна при угадывании корней квадратного уравнения.

Пример 8

Найдем корни уравнения:

а) $x^2 - 17x + 60 = 0$;

б) $x^2 - 63x - 730 = 0$;

в) $3x^2 - 385x + 382 = 0$;

г) $x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + a = 0$.

а) Для уравнения $x^2 - 17x + 60 = 0$ выполняются равенства: $x_1 + x_2 = 17 = 5 + 12$ и $x_1x_2 = 60 = 5 \cdot 12$. Легко угадать, что $x_1 = 5$ и $x_2 = 12$.

б) Для уравнения $x^2 - 63x - 730 = 0$ имеем: $x_1 + x_2 = 63 = 73 + (-10)$ и $x_1x_2 = -730 = 73 \cdot (-10)$. Тогда находим $x_1 = 73$ и $x_2 = -10$.

Заметим, что **если свободный член уравнения – отрицательное число, то корни уравнения имеют противоположные знаки**. Это соображение необходимо учитывать при подборе корней.

в) Один корень уравнения $3x^2 - 385x + 382 = 0$ виден сразу: $x_1 = 1$ (действительно, $3 \cdot 1^2 - 385 \cdot 1 + 382 = 0$). Тогда по теореме Виета $x_1x_2 = \frac{382}{3}$ или $x_2 = \frac{382}{3} = 127\frac{1}{3}$.

г) Для уравнения $x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + a = 0$ выполняются равенства $x_1 + x_2 = 3a + 1 = a + (2a+1)$ и $x_1x_2 = 2a^2 + a = a(2a+1)$. Поэтому корни уравнения $x_1 = a$ и $x_2 = 2a + 1$.

Пример 9

Корни квадратного уравнения $3x^2 - 5x + 1 = 0$ равны x_1 и x_2. Напишем новое квадратное уравнение, которое имеет корни $2x_1$ и $2x_2$.

Для данного уравнения запишем формулы Виета: $x_1 + x_2 = \frac{5}{3}$ и $x_1x_2 = \frac{1}{3}$. Предположим, что мы составили требуемое приведенное квадратное уравнение $y^2 + px + q = 0$, корни которого $y_1 = 2x_1$ и $y_2 = 2x_2$. Запишем для него формулы Виета: $y_1 + y_2 = -p$ и $y_1y_2 = q$. Учтем связь между корнями старого и нового уравнений. Получаем: $y_1 + y_2 = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{3} = -p$ (откуда $p = -\frac{10}{3}$) и $y_1 \cdot y_2 = 2x_1 \cdot 2x_2 = 4(x_1x_2) = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3} = q$. Тогда искомое уравнение имеет вид $y^2 - \frac{10}{3}y + \frac{4}{3} = 0$ или $3y^2 - 10y + 4 = 0$ (безразлично, какой буквой обозначена неизвестная x, y, t и т. д.).

Заметим, что мы решили задачу, не находя корней ни старого, ни нового уравнений.

Используем аналогичный подход для решения более общей задачи.

Пример 10

Корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ равны x_1 и x_2. Напишем новое квадратное уравнение, которое имеет корни $3x_1$ и $3x_2$.

Для данного уравнения используем теорему 1: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ и $x_1x_2=\frac{c}{a}$. Предположим, что составлено новое приведенное квадратное уравнение $y^2+px+q=0$, корни которого $y_1=3x_1$ и $y_2=3x_2$. Запишем для него формулы Виета: $y_1+y_2=-p$ и $y_1y_2=q$. Учтем связь между корнями старого и нового уравнений. Тогда получаем: $y_1+y_2=3x_1+3x_2=3(x_1+x_2)=3\left(-\frac{b}{a}\right)=-3\frac{b}{a}=-p$ (откуда $p=3\frac{b}{a}$) и $y_1y_2=3x_1\cdot 3x_2=9(x_1x_2)=9\frac{c}{a}=q$. Поэтому искомое уравнение имеет вид $y^2+3\frac{b}{a}y+9\frac{c}{a}=0$ или $ay^2+3by+9c=0$.

Таким образом, из решения можно сделать вывод: если корни двух квадратных уравнений отличаются в 3 раза (в n раз), то их вторые коэффициенты также отличаются в 3 раза (в n раз), а свободные члены в $3^2=9$ раз (в n^2 раз).

Замечание. На наш взгляд было бы логичнее изменить порядок изучения этого параграфа. Сначала рассмотреть утверждения, связанные с корнями и коэффициентами квадратного уравнения (теоремы 1 и 5), затем обсудить вопросы о разложении квадратного трехчлена на множители (теоремы 2–4).

IV. Контрольные вопросы

1. Соотношение между корнями и коэффициентами квадратного уравнения (теорема 1).
2. Утверждения о разложении квадратного трехчлена на множители (теоремы 2–4).
3. Напишите квадратное уравнение, если выполнимы равенства $x_1+x_2=-p$ и $x_1x_2=q$ (теорема 5).

V. Задание на уроке

№ 29.3 (а, б); 29.8 (в, г); 29.10 (а, б); 29.12 (а, в); 29.13; 29.17 (а, г); 29.21 (в, г); 29.22 (а); 29.24; 29.26 (а, б); 29.39; 29.45.

VI. Задание на дом

№ 29.3 (в, г); 29.8 (а, б); 29.10 (в, г); 29.12 (б, г); 29.14; 29.17 (б, в); 29.21 (а, б); 29.22 (б); 29.25; 29.26 (в, г); 29.40; 29.46.

VII. Творческие задания

1. Квадратное уравнение $3x^2 - 5x + 1 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Напишите квадратное уравнение, корни которого равны:

а) $-x_1$ и $-x_2$; б) $3x_1$ и $3x_2$;
в) $x_1 + 1$ и $x_2 + 1$; г) $x_1 - 2$ и $x_2 - 2$;
д) $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$; е) $\frac{2}{x_1}$ и $\frac{2}{x_2}$;
ж) $x_1 + x_2$ и x_1x_2; з) $2x_1 + 2x_2$ и $5x_1x_2$.

Ответы: а) $3y^2 + 5y + 1 = 0$; б) $y^2 - 5y + 3 = 0$; в) $3y^2 - 11y + 9 = 0$; г) $3y^2 + 7y + 3 = 0$; д) $y^2 - 5y + 3 = 0$; е) $y^2 - 10y + 12 = 0$; ж) $9y^2 - 18y + 5 = 0$; з) $9y^2 - 45y + 50 = 0$.

2. Пусть корни квадратного уравнения $6x^2 - 5x - 2 = 0$ равны x_1 и x_2. Не решая уравнения, найдите:

а) $x_1 + x_2$; б) x_1x_2;
в) $x_1^2 + x_2^2$; г) $x_1^3 + x_2^3$;
д) $x_1x_1^3 + x_1^3x_2$; е) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$;
ж) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$; з) $\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2}$;
и) $|x_1 - x_2|$.

Ответы: а) $\frac{5}{6}$; б) $-\frac{1}{3}$; в) $\frac{49}{36}$; г) $\frac{305}{216}$; д) $-\frac{49}{108}$; е) $-\frac{5}{2}$; ж) $\frac{49}{4}$; з) $\frac{305}{24}$; и) $\frac{\sqrt{73}}{6}$.

3. Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равны x_1 и x_2. Найдите:

а) $x_1 + x_2$; б) x_1x_2;
в) $x_1^2 + x_2^2$; г) $x_1^3 + x_2^3$;
д) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; е) $|x_1 - x_2|$.

Ответы: а) $-\frac{b}{a}$; б) $\frac{c}{a}$; в) $\frac{b^2 - 2ac}{a^2}$; г) $\frac{b(3ac - b^2)}{a^3}$; д) $-\frac{b}{c}$; е) $\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} = \frac{\sqrt{D}}{|a|}$.

4. Корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ равны x_1 и x_2. Напишите квадратное уравнение, корни которого равны:

а) $-x_1$ и $-x_2$; б) $3x_1$ и $3x_2$;

в) x_1+1 и x_2+1; г) $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$.

Ответы: а) $ay^2-by+c=0$; б) $ay^2+3by+9c=0$; в) $ay^2+(b-2a)y+$ $+(c-b+a)=0$; г) $cy^2+by+a=0$.

5. Найдите корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, если:

а) $a+b+c=0$; б) $4a+2b+c=0$;

в) $a-b+c=0$; г) $4a-2b+c=0$.

Ответы: а) $x_1=1$, $x_2=\frac{c}{a}$; б) $x_1=2$, $x_2=\frac{c}{2a}$; в) $x_1=-1$, $x_2=-\frac{c}{a}$; г) $x_1=-2$, $x_2=-\frac{c}{2a}$.

6а. При каком значении параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2+(2-a)x-a-3=0$ наименьшая? Найдите ее.

6б. При каком значении параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2+(a-1)x+a^2-1,5=0$ наибольшая? Найдите ее.

Ответы: а) $a=1$ и $x_1^2+x_2^2=9$; б) $a=-1$ и $x_1^2+x_2^2=5$.

VIII. Подведение итогов урока

§ 30. Иррациональные уравнения

Уроки 71–73. Уравнения, содержащие радикалы

Цель: рассмотреть решение простейших иррациональных уравнений.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $3x^2 - 2x - 4 = 0$. Найдите:
   а) $x_1 + x_2$; б) x_1x_2;
   в) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$; г) $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$.
2. Составьте квадратное уравнение, которое имеет корни $-\frac{3}{5}$ и $\frac{1}{2}$.
3. Найдите корни уравнения $5x^2 + 381x - 386 = 0$.

Вариант 2

1. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $2x^2 - 5x + 1 = 0$. Найдите:
   а) $x_1 + x_2$; б) x_1x_2;
   в) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$; г) $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$.
2. Составьте квадратное уравнение, которое имеет корни $-\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{4}$.
3. Найдите корни уравнения $4x^2 - 547x + 543 = 0$.

III. Изучение нового материала

Уравнение, в котором неизвестная входит под знак квадратного корня (радикала), называют иррациональным.

Пример 1

а) Уравнение $3\sqrt{2x+1} = x-5$ – иррациональное, т. к. под знаком корня содержится неизвестная x.

б) Уравнение $\sqrt{3}x = \sqrt{5}-\sqrt{2}$ не является иррациональным, т. к. переменная x не содержится под знаком корня. Корни извлекаются только из чисел. Данное уравнение является линейным.

в) Уравнение $\sqrt{5}x^2 - (\sqrt{3}-\sqrt{2})x - \sqrt{7} = 0$ также не является иррациональным. Данное уравнение – квадратное.

В этом параграфе рассмотрим только простейшие иррациональные уравнения. Для их решения используют **два основных приема: возведение в квадрат обеих частей уравнения и замена переменной.**

Пример 2

Решим уравнение $\sqrt{2x-1} = \frac{x+1}{2}$.

Возведем в квадрат обе части уравнения и получим: $2x-1=\frac{x^2+2x+1}{4}$ или $0 = x^2 - 6x + 5$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = 1$ и $x_2 = 5$. Проверим эти корни. При подстановке в уравнение значения $x_1 = 1$ получим: $\sqrt{2\cdot1-1}=\frac{1+1}{2}$ (верное равенство), при подстановке $x_2 = 5$ имеем: $\sqrt{2\cdot5-1}=\frac{5+1}{2}$ (верное равенство). Таким образом, данное уравнение имеет два корня $x_1 = 1$ и $x_2 = 5$.

Однако, не все так просто. **Иррациональное уравнение может и не иметь корней.**

Пример 3

Решим уравнение $\sqrt{2x-3}=\sqrt{x^2+4x-6}$.

Возведем обе части уравнения в квадрат и получим: $2x-3=x^2+4x-6$ или $0 = x^2 + 2x - 3$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = 1$ и $x_2 = -3$. Проверим эти корни. При подстановке в уравнение значения $x_1 = 1$ получим: $\sqrt{2\cdot1-3}=\sqrt{1^2+4\cdot1-6}$ или $\sqrt{-1}=\sqrt{-1}$. Но выражение $\sqrt{-1}$ не имеет смысла. Поэтому число $x = 1$ не является корнем данного иррационального уравнения. При подстановке значения $x_2 = -3$ имеем: $\sqrt{2\cdot(-3)-3}=$ $=\sqrt{(-3)^2+4\cdot(-3)-6}$ или $\sqrt{-9}=\sqrt{-9}$. Но выражение $\sqrt{-9}$ также не имеет смысла. Поэтому и число $x = -3$ не является корнем данного уравнения. Следовательно, иррациональное уравнение не имеет корней.

При решении иррационального уравнения могут возникать **посторонние корни**.

Пример 4

Решим уравнение $\sqrt{2x-1}=x-2$.

Возведем в квадрат обе части уравнения и получим: $2x-1=x^2-4x+4$ или $0 = x^2 - 6x + 5$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = 1$ и $x_2 = 5$. Проверим эти корни. При подстановке в уравнение значения $x_1 = 1$ получаем: $\sqrt{2\cdot1-1}=1-2$ или $\sqrt{1}=-1$. Но квадратный корень по определению число неотрицательное. Поэтому имеем неверное равенство. Следовательно, корень $x = 1$ –

посторонний. При подстановке значения $x_2 = 5$ имеем: $\sqrt{2\cdot5-1}=5-2$ или $3 = 3$ (верное равенство). Поэтому данное иррациональное уравнение имеет единственный корень $x = 5$.

Таким образом, после решения иррационального уравнения обязательно надо делать **проверку корней**.

Если в уравнение входит несколько знаков радикала, то от них избавляются постепенно, уединяя один из корней и постепенно возводя части уравнения в квадрат.

Пример 5

Решим уравнение $\sqrt{3x-2}+\sqrt{5x-1}=5$.

Сначала уединим второй радикал и запишем уравнение в виде $\sqrt{5x-1}=5-\sqrt{3x-2}$. Возведем в квадрат обе части уравнения: $5x-1=25-10\sqrt{3x-2}+3x-2$. Вновь уединим радикал и запишем уравнение в виде $10\sqrt{3x-2}=24-2x$ или $5\sqrt{3x-2}=12-x$. Возведем обе части этого уравнения в квадрат: $25(3x-2)=144-24x+x^2$ или $0 = x^2 - 99x + 194$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = 2$ и $x_2 = 97$. Проверка показывает, что корень $x = 97$ – посторонний.

Итак, данное уравнение имеет единственный корень $x = 2$.

Рассмотрим теперь второй способ решения – замену переменной.

Пример 6

Решим уравнение $\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+2}}+6\sqrt{\dfrac{x+2}{2x-1}}=5$.

В уравнение неизвестная x входит или в виде выражения $\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+2}}$ или обратного выражения $\sqrt{\dfrac{x+2}{2x-1}}$. Поэтому введем новую переменную $y=\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+2}}$. Тогда данное уравнение имеет вид $y+\dfrac{6}{y}=5$ или $y^2 - 5y + 6 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $y_1 = 2$ и $y_2 = 3$. Вернемся к старой неизвестной x и получим два уравнения:

а) $\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+2}}=2$. Возведем в квадрат обе части уравнения и получим: $\dfrac{2x-1}{x+2}=4$ или $2x - 1 = 4x + 8$, откуда $x = -4{,}5$.

б) $\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}=3$. Возведем обе части уравнения в квадрат и получим: $\frac{2x-1}{x+2}=9$ или $2x-1=9x+18$, откуда $x=-\frac{19}{7}$.

Итак, данное уравнение имеет два корня.

Пример 7

Решим уравнение $2x^2-3\sqrt{2x^2-3x-4}=3x+8$.

Запишем уравнение в виде $2x^2-3x-4-3\sqrt{2x^2-3x-4}-4=0$ и введем новую переменную $y=\sqrt{2x^2-3x-4}$ (по определению квадратного корня $y \geq 0$), тогда $y^2=2x^2-3x-4$. После этого данное уравнение имеет вид $y^2-3y-4=0$. Корни этого квадратного уравнения $y_1=4$ и $y_2=-1$ (не подходит, т. к. $y \geq 0$). Вернемся к старой неизвестной x и получим уравнение $\sqrt{2x^2-3x-4}=4$. Возведем обе части уравнения в квадрат и получим: $2x^2-3x-4=16$ или $2x^2-3x-20=0$. Корни этого квадратного уравнения $x_1=4$ и $x_2=-2{,}5$ являются также корнями данного иррационального уравнения.

Заметим, что замена переменной полезна, если в уравнение входит несколько знаков радикала. Еще раз вернемся к примеру 5.

Пример 8

Решим уравнение $\sqrt{3x-2}+\sqrt{5x-1}=5$.

Введем новую переменную $y=\sqrt{3x-2}$ (причем $y \geq 0$) и выразим из этого равенства величину x. Получаем $y^2=3x-2$, откуда $x=\frac{y^2+2}{3}$. Тогда данное уравнение имеет вид $y+\sqrt{5\frac{y^2+2}{3}-1}=5$ или $y+\sqrt{\frac{5y^2+7}{3}}=5$. Заметим, что теперь в уравнение входит только один знак радикала (вместо двух знаков в исходном уравнении). Далее решение традиционно. Запишем уравнение в виде $\sqrt{\frac{5y^2+7}{3}}=5-y$ и возведем обе части уравнения в квадрат. Получаем: $\frac{5y^2+7}{3}=25-10y+y^2$ или $y^2+15y-34=0$. Корни этого квадратного уравнения $y_1 = 2$ и $y_2 = -17$ (не подходит, т. к. $y \geq 0$). Вернемся к старой неизвестной x и по полученному соотношению $x = \frac{y^2+2}{3}$ найдем единственный корень данного уравнения $x = \frac{2^2+2}{3} = 2$.

В заключение заметим, что **при избавлении от знаменателей в рациональных уравнениях (§ 26) и при возведении в квадрат частей иррациональных уравнений (§ 30) возможно появление посторонних корней. Поэтому проверка корней необходима.**

Более сложные иррациональные уравнения будут рассмотрены в старших классах.

IV. Задание на уроке

№ 30.3 (а); 30.5 (а, б); 30.10 (в); 30.13 (а, б); 30.17 (г); 30.19 (а, б); 30.21 (в, г); 30.22 (а, б); 30.23 (в, г); 30.24 (а, б).

V. Задание на дом

№ 30.3 (в); 30.5 (в, г); 30.10 (а); 30.13 (в, г); 30.17 (а); 30.19 (в, г); 30.21 (а, б); 30.22 (в, г); 30.23 (а, б); 30.24 (в, г).

VI. Подведение итогов урока

Уроки 74–75. Контрольная работа № 5 по теме «Квадратные уравнения»

***Цель*:** проверка знаний учащихся с использованием разноуровневых вариантов.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в 6 вариантах различной сложности (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – сложнее, варианты 5, 6 – самые сложные). При этом сложность вариантов нарастает не очень резко. Каждый вариант содержит 6 задач примерно одинаковой сложности (может быть, несколько сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач. Одна задача является резервной (или запасной) и дает некоторую возможность выбора учащимся. При таких же критериях оценки в случае вариантов 3, 4 дается дополнительно 0,5 балла и в случае вариантов 5, 6 – дополнительно 1,0 балла (учитывая более высокую сложность этих вариантов). Поэтому в случае вариантов 5, 6 оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач.

Выбор вариантов может быть сделан учителем или учащимся (при этом число экземпляров вариантов должно быть достаточным). Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

III. Варианты работы

Вариант 1

Решите уравнение:

1. $\dfrac{x^2-3x+2}{x+4}=0;$

2. $\dfrac{10}{2x-3}=x-1;$

3. $\dfrac{x-6}{x^2-36}=0.$

4. Найдите сумму и произведение корней уравнения $3x^2+5x-1=0$.

5. Найдите координаты точек пересечения графиков функций $y=\dfrac{1}{x}$ и $y=2-x$.

6. При каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{x^2-4}{x+a}=0$ имеет единственное решение?

Вариант 2

Решите уравнение:

1. $\dfrac{x^2-4x+3}{x+1}=0;$

2. $\dfrac{15}{6x-1}=x+2;$

3. $\dfrac{x+7}{x^2-49}=0.$

4. Найдите сумму и произведение корней уравнения $2x^2 + 3x - 1 = 0$.

5. Найдите координаты точек пересечения графиков функций $y = \dfrac{2}{x}$ и $y = x - 1$.

6. При каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{x^2 - 9}{x - a} = 0$ имеет единственное решение?

Вариант 3

Решите уравнение:

1. $\dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2} = 0$;

2. $\dfrac{9}{x - 1} = 2x - 5$;

3. $\dfrac{|x| - 3}{x^2 - 9} = 0$.

4. Уравнение $3x^2 + 5x - 1 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Найдите величину $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2}$.

5. Числитель обыкновенной несократимой дроби на 2 меньше знаменателя. Если к числителю и знаменателю прибавить 2, то дробь увеличится на $\dfrac{8}{15}$. Найдите эту дробь.

6. При каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{x^2 + 3x - 4}{x - a} = 0$ имеет два решения?

Вариант 4

Решите уравнение:

1. $\dfrac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + x - 2} = 0$;

2. $\dfrac{10}{x - 1} = 2x - 1$;

3. $\dfrac{|x| - 4}{x^2 - 16} = 0$.

4. Уравнение $2x^2 + 3x - 1 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Найдите величину $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2}$.

5. Числитель обыкновенной несократимой дроби на 3 меньше знаменателя. Если к числителю и знаменателю прибавить 1, то дробь увеличится на $\frac{3}{20}$. Найдите эту дробь.

6. При каких значениях параметра a уравнение $\frac{x^2+x-6}{x+a}=0$ имеет два решения?

Вариант 5

Решите уравнение:

1. $\frac{7x-6}{x^3+27}=\frac{1}{x^2-3x+9}-\frac{1}{x+3}$;
2. $\frac{|x+1|-3}{x^2-x-2}=0.$

3. Мастер тратит на всю работу на 3 дня меньше, чем ученик, и на один день больше, чем работая вместе с учеником. За сколько дней сделает всю работу мастер, работая один?

4. Решите уравнение $x^2+3x=\frac{8}{x^2+3x-2}$.

5. При всех значениях параметра a решите уравнение $\frac{x^2-3x+2}{x+a}=0.$

6. Решите уравнение с двумя неизвестными $x^2+4y^2=6x-4y-10.$

Вариант 6

Решите уравнение:

1. $\frac{x-14}{x^3-8}=\frac{5}{x^2+2x+4}-\frac{1}{x-2}$;
2. $\frac{|x+1|-2}{x^2+x-2}=0.$

3. Первая бригада выполняет работу на 3 ч дольше, чем вторая бригада, выполняющая ту же работу, и на 4 ч дольше, чем работая вместе со второй бригадой. За сколько часов выполняет работу одна первая бригада?

4. Решите уравнение $x^2+x+1=\frac{15}{x^2+x+3}$.

5. При всех значениях параметра a решите уравнение $\frac{x^2-4x+3}{x-a}=0.$

6. Решите уравнение с двумя неизвестными $4x^2+y^2=4x-4y-5.$

Урок 76. Итоги контрольной работы

Цели: сообщить результаты работы, рассмотреть наиболее типичные ошибки, разобрать трудные задачи.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Итоги контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения.

Данные о результатах работы удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи / Итоги	1	2	3	...	6
+	5				
±	1				
—	1				
Ø	1				

Обозначения:

\+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;

± – число решивших задачу со значительными ошибками;

— – число не решивших задачу;

Ø – число не решавших задачу.

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.

3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, решившими эту задачу).

4. Разбор всей контрольной работы (вывесить на стенде ответы к заданиям вариантов и разбор наиболее трудных вариантов).

III. Ответы и решения

Ответы

Вариант 1

1. *Ответ*: $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$.
2. *Ответ*: $x_1 = -1$ и $x_2 = 3{,}5$.
3. *Ответ*: решений нет.
4. *Ответ*: $x_1 + x_2 = -\dfrac{5}{3}$, $x_1x_2 = -\dfrac{1}{3}$.
5. *Ответ*: (1; 1).
6. *Ответ*: при $a = \pm 2$.

Вариант 2

1. *Ответ*: $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$.

2. *Ответ*: $x_1 = 1$ и $x_2 = -\frac{17}{6}$.

3. *Ответ*: решений нет.

4. *Ответ*: $x_1 + x_2 = -\frac{3}{2}$, $x_1 x_2 = -\frac{1}{2}$.

5. *Ответ*: $(-1; -2)$ и $(2; 1)$.

6. *Ответ*: при $a = \pm 3$.

Вариант 3

1. *Ответ*: $x_1 = -3$.

2. *Ответ*: $x_1 = 4$ и $x_2 = -0{,}5$.

3. *Ответ*: решений нет.

4. *Ответ*: 31.

5. *Ответ*: $\frac{1}{3}$.

6. *Ответ*: при всех a, кроме $a = 1$ и $a = -4$.

Вариант 4

1. *Ответ*: $x_1 = -4$.

2. *Ответ*: $x_1 = 3$ и $x_2 = -1{,}5$.

3. *Ответ*: решений нет.

4. *Ответ*: 13.

5. *Ответ*: $\frac{1}{4}$.

6. *Ответ*: при всех a, кроме $a = 3$ и $a = -2$.

Решения

Вариант 5

1. В правой части уравнения приведем дроби к общему знаменателю и упростим ее. Получаем: $\frac{7x-6}{x^3+27} = \frac{1}{x^2-3x+9} - \frac{1}{x+3}$, или $\frac{7x-6}{x^3+27} = \frac{x+3-x^2+3x-9}{(x+3)(x^2-3x+9)}$, или $\frac{7x-6}{x^3+27} = \frac{-x^2+4x-6}{(x+3)(x^2-3x+9)}$. Обе части уравнения определены при $x \neq -3$ и равны. Так как дроби и их знаменатели равны, то равны и числители. Имеем: $7x-6 = -x^2+4x-6$, или $x^2 + 3x = 0$, или $x(x + 3) = 0$. Корни этого уравнения $x_1 = 0$ и $x_2 = -3$. Условию $x \neq -3$ удовлетворяет только корень $x = 0$, который и является решением данного уравнения.

Ответ: $x = 0$.

2. Разложим знаменатель дроби на множители и получим: $\frac{|x+1|-3}{x^2-x-2}=0$ или $\frac{|x+1|-3}{(x+1)(x-2)}=0$. Допустимые значения переменной $x_1 \neq -1$ и $x_2 \neq 2$. Дробь равна нулю, если ее числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю. Получаем уравнение $|x+1|-3=0$, или $|x+1|=3$, или $x+1=\pm 3$, откуда $x_1 = 2$ и $x_2 = -4$. Учитывая ограничения на x, определим, что корнем данного уравнения будет $x = -4$.

Ответ: $x = -4$.

3. Пусть мастер тратит на работу x дней, тогда ученик – $(x + 3)$ дня. Примем работу за единицу. За один день мастер делает $\frac{1}{x}$ часть работы, ученик – $\frac{1}{x+3}$ часть. Вместе за один день мастер и ученик выполняют $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}=\frac{2x+3}{x(x+3)}$ часть работы и сделают ее за $1:\frac{2x+3}{x(x+3)}=\frac{x(x+3)}{2x+3}$ дней. Так как мастер тратит на работу на один день больше, чем работая вместе с учеником, то получаем уравнение $x=\frac{x(x+3)}{2x+3}+1$. Умножим все члены на $2x + 3$. Имеем: $x(2x+3) = x(x+3) + 2x + 3$, или $2x^2 + 3x = x^2 + 3x + 2x + 3$, или $x^2 - 2x - 3 = 0$. Корни этого уравнения $x_1 = 3$ и $x_2 = -1$ (не подходит).

Ответ: 3 дня.

4. Для решения уравнения $x^2+3x=\frac{8}{x^2+3x-2}$ введем новую переменную $y = x^2 + 3x$ и получим уравнение $y=\frac{8}{y-2}$ или $y^2 - 2y - 8 = 0$ (где $y \neq 2$). Корни этого уравнения $y_1 = -2$ и $y_2 = 4$. Теперь вернемся к старой переменной и получим уравнения:

а) $x^2 + 3x = -2$ или $x^2 + 3x + 2 = 0$. Его корни $x_1 = -1$ и $x_2 = -2$;

б) $x^2 + 3x = 4$ или $x^2 + 3x - 4 = 0$. Его корни $x_1 = 1$ и $x_2 = -4$.

Итак, данное уравнение имеет четыре корня.

Ответ: $x_1 = -1$ и $x_2 = -2$, $x_3 = 1$ и $x_4 = -4$.

5. Разложим числитель дроби на множители и запишем уравнение в виде $\frac{(x-1)(x-2)}{x+a}=0$. Дробь равна нулю, если ее числитель $(x-1)(x-2)=0$, а знаменатель $x+a\neq 0$ (т.е. $a\neq -x$). Корни уравнения $x_1=1$ и $x_2=2$. Поэтому если $a\neq -1$ и $a\neq -2$, то уравнение имеет два корня $x_1=1$ и $x_2=2$. Если $a=-1$, то остается только один корень $x=2$ (корень $x=1$ решением данного уравнения не является). Если $a=-2$, то остается только один корень $x=1$ (корень $x=2$ решением данного уравнения не будет).

Ответ: при $a\neq -1$, $a\neq -2$ $x_1=1$ и $x_2=2$; при $a=-1$ $x=2$; при $a=-2$ $x=1$.

6. Для решения уравнения $x^2+4y^2=6x-4y-10$ перенесем все члены в левую часть $x^2+4y^2-6x+4y+10=0$ и выделим полные квадраты по переменным x и y. Получаем: $(x^2-6x+9)+$ $+(4y^2+4y+1)=0$ или $(x-3)^2+(2y+1)^2=0$. Так как каждое слагаемое $(x-3)^2$ и $(2y+1)^2$ неотрицательно, то их сумма равна нулю только при условии, что каждое из них равно нулю. Получаем систему линейных уравнений $\begin{cases}x-3=0,\\2y+1=0,\end{cases}$ откуда $x=3$, $y=-\frac{1}{2}$.

Ответ: $x=3$, $y=-\frac{1}{2}$.

Вариант 6

1. В правой части уравнения приведем дроби к общему знаменателю и упростим ее. Получаем: $\frac{x-14}{x^3-8}=\frac{5}{x^2+2x+4}-\frac{1}{x-2}$, или $\frac{x-14}{x^3-8}=\frac{5(x-2)-x^2-2x-4}{(x-2)(x^2+2x+4)}$, или $\frac{x-14}{x^3-8}=\frac{-x^2+3x-14}{(x-2)(x^2+2x+4)}$. Обе части уравнения определены при $x\neq 2$ и равны. Так как дроби и их знаменатели равны, то равны и числители. Имеем: $x-14=-x^2+3x-14$, или $x^2-2x=0$, или $x(x-2)=0$. Корни этого уравнения $x_1=0$ и $x_2=2$. Условию $x\neq 2$ удовлетворяет только корень $x=0$, который и является решением данного уравнения.

Ответ: $x=0$.

2. Разложим знаменатель дроби на множители и получим: $\frac{|x+1|-2}{x^2+x-2}=0$ или $\frac{|x+1|-2}{(x+2)(x-1)}=0$. Допустимые значения переменной $x_1\neq -2$ и $x_2\neq 1$. Дробь равна нулю, если ее числитель

равен нулю, а знаменатель не равен нулю. Получаем уравнение $|x+1|-2=0$, или $|x+1|=2$, или $x+1=\pm 2$, откуда $x_1=1$ и $x_2=-3$. Учитывая ограничения на x, определим, что корнем данного уравнения будет $x=-3$.

Ответ: $x=-3$.

3. Пусть первая бригада тратит на работу x ч, тогда вторая бригада – $(x-3)$ ч. Примем работу за единицу. За один час первая бригада делает $\frac{1}{x}$ часть работы, вторая бригада – $\frac{1}{x-3}$ часть. Вместе за один час две бригады выполняют $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-3}=\frac{2x-3}{x(x-3)}$ часть работы и сделают ее за $1:\frac{2x-3}{x(x-3)}=\frac{x(x-3)}{2x-3}$ ч. Так как первая бригада тратит на работу на 4 ч больше, чем при совместной работе со второй бригадой, то получаем уравнение $x=\frac{x(x-3)}{2x-3}+4$. Умножим все члены на $2x-3$. Имеем: $x(2x-3)=x(x-3)+4(2x-3)$, или $2x^2-3x=$ $=x^2-3x+8x-12$, или $x^2-8x+12=0$. Корни этого уравнения $x_1=2$ и $x_2=6$. Корень $x=2$ не подходит, т. к. $x>3$.

Ответ: 6 ч.

4. Для решения уравнения $x^2+x+1=\frac{15}{x^2+x+3}$ введем новую переменную $y=x^2+x$ и получим уравнение $y+1=\frac{15}{y+3}$, или $(y+1)(y+3)=15$, или $y^2+4y-12=0$ (где $y\neq-3$). Корни этого уравнения $y_1=-6$ и $y_2=2$. Теперь вернемся к старой переменной и получим уравнения:

а) $x^2+x=-6$ или $x^2+x+6=0$. Это уравнение корней не имеет;

б) $x^2+x=2$ или $x^2+x-2=0$. Его корни $x_1=1$ и $x_2=-2$.

Итак, данное уравнение имеет два корня.

Ответ: $x_1=1$ и $x_2=-2$.

5. Разложим числитель дроби на множители и запишем уравнение в виде $\frac{(x-1)(x-3)}{x-a}=0$. Дробь равна нулю, если ее числитель $(x-1)(x-3)=0$, а знаменатель $x-a\neq 0$ (т.е. $a\neq x$). Корни уравнения $x_1=1$ и $x_2=3$. Поэтому, если $a\neq 1$ и $a\neq 3$, то уравнение имеет два корня $x_1=1$ и $x_2=3$. Если $a=1$, то остается только один корень

$x = 3$ (корень $x = 1$ решением данного уравнения не является). Если $a = 3$, то остается только один корень $x = 1$ (корень $x = 3$ решением данного уравнения не будет).

Ответ: при $a \neq 1$, $a \neq 3$ $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$; при $a = 1$ $x = 3$; при $a = 3$ $x = 1$.

6. Для решения уравнения $4x^2 + y^2 = 4x - 4y - 5$ перенесем все члены в левую часть $4x^2 + y^2 - 4x + 4y + 5 = 0$ и выделим полные квадраты по переменным x и y. Получаем: $(4x^2 - 4x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 0$ или $(2x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 0$. Так как каждое слагаемое $(2x - 1)^2$ и $(y + 2)^2$ неотрицательно, то их сумма равна нулю только при условии, что каждое из них равно нулю. Получаем систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x-1=0, \\ y+2=0, \end{cases}$ откуда $x = \frac{1}{2}$, $y = -2$.

Ответ: $x = \frac{1}{2}$, $y = -2$.

Уроки № 77–78. Зачетная работа по теме «Квадратные уравнения»

Цель: проверка знаний учащихся по вариантам одинаковой сложности.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Характеристика зачетной работы

Работа составлена в двух равноценных вариантах. По сравнению с контрольной работой увеличено количество заданий. Соответственно у учащихся возрастает возможность выбора задач. Все задания разбиты на блоки А, В и С. Самые простые задачи находятся в части А, более сложные – в части В, еще сложнее – в части С. Каждая задача из блока А оценивается в 1 балл, из блока В – в 2 балла, из блока С – в 3 балла. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов и блока С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» – за 10 баллов, оценка «5» – за 14 баллов.

Так как эта работа является зачетной, то в нее не включены принципиально новые задачи. Поэтому разбору заданий работы отдельного занятия можно и не посвящать (решения задач могут быть вывешены на стенде). Для стендового размещения разбор вариантов приводится.

III. Варианты зачетной работы

Вариант 1

A

Решите уравнение:

1. $2x^2 - 6 = 0$;
2. $3x^2 + 5x = 0$;
3. $-7x^2 = 0$;
4. $3x^2 - x - 2 = 0$.
5. Графически решите уравнение $x^2 = x + 1$.
6. Турист проехал на моторной лодке 25 км вверх по реке, а обратно спустился на плоту. В лодке он плыл на 10 ч меньше, чем на плоту. Найдите скорость течения, если скорость лодки в стоячей воде 12 км/ч.
7. Уравнение $2x^2 + 5x + 1 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Найдите значение выражения $x_1x_2^2 + x_1^2x_2$.

B

Решите уравнение:

8. $2x^2 - 1999x + 1997 = 0$;
9. $4x^2 - 7ax + 3a^2 = 0$.
10. Уравнение $3x^2 + 5x + 1 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Найдите значение выражения $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$.
11. Известно, что x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 - 8x + a = 0$ и $3x_1 + 4x_2 = 29$. Найдите значение a и корни уравнения.

C

Решите уравнение:

12. $(a-3)x^2 + ax - 2a + 3 = 0$;
13. $\frac{x+3a}{x+a}-\frac{x+a}{x-a}=\frac{2a-3a^2}{x^2-a^2}$.
14. Аналитически и графически решите уравнение $|x - 1| = x^2$.

Вариант 2

A

Решите уравнение:

1. $2x^2 - 10 = 0$;
2. $4x^2 + 7x = 0$;
3. $-5x^2 = 0$;
4. $4x^2 - 3x - 1 = 0$.

5. Графически решите уравнение $x^2 = 1 - x$.

6. Моторная лодка прошла 35 км вверх по реке и на 18 км поднялась по ее притоку, затратив на весь путь 8 ч. Скорость течения в реке на 1 км/ч меньше скорости течения в ее притоке. Найдите скорость течения в реке, если скорость лодки в стоячей воде 10 км/ч.

7. Уравнение $3x^2 + 5x + 1 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Найдите значение выражения $x_1 - x_1x_2 + x_2$.

B

Решите уравнение:

8. $3x^2 - 1997x + 1994 = 0$;

9. $3x^2 - 5ax + 2a^2 = 0$.

10. Уравнение $2x^2 + 5x + 1 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Найдите значение выражения $x_1^3x_2 + x_1x_2^3$.

11. Известно, что x_1 и x_2 – корни уравнения $3x^2 + 2x + a = 0$ и $2x_1 + 3x_2 = 0$. Найдите значение a и корни уравнения.

C

Решите уравнение:

12. $(a-2)x^2 + 2ax - 3a + 2 = 0$;

13. $\dfrac{x-4a}{x+2a} - \dfrac{12a^3}{x^2-4a^2} = \dfrac{x-8a}{x-2a}$.

14. Аналитически и графически решите уравнение $|x + 1| = x^2$.

IV. Разбор вариантов работы

Вариант 1

1. Уравнение $2x^2 - 6 = 0$ запишем в виде $2x^2 = 6$.

Разделим обе части уравнения на число 2 (не равное нулю) и получим: $x^2 = 3$.

Корни этого уравнения $x_1 = -\sqrt{3}$ и $x_2 = \sqrt{3}$.

Ответ: $-\sqrt{3}$ и $\sqrt{3}$.

2. Левую часть уравнения $3x^2 + 5x = 0$ разложим на множители и получим: $x(3x + 5) = 0$.

Так как произведение двух множителей равно нулю, то хотя бы один из них равен нулю. Получаем: $x_1 = 0$ или $3x + 5 = 0$ (корень этого линейного уравнения $x_2 = -\dfrac{5}{3}$).

Ответ: 0 и $-\dfrac{5}{3}$.

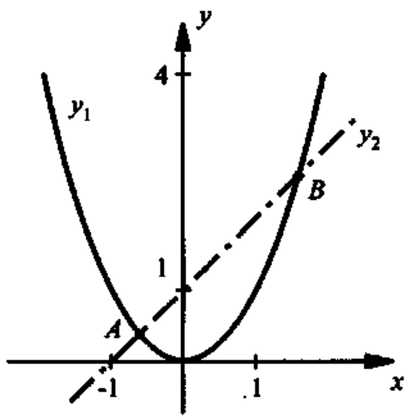
3. Разделим обе части уравнения $-7x^2 = 0$ на число -7 (не равное нулю) и получим: $x^2 = 0$. Это уравнение имеет единственный корень $x = 0$.

Ответ: 0.

4. Найдем дискриминант квадратного уравнения $3x^2 - x - 2 = 0$ и получим: $D = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 25$. Теперь находим корни уравнения $x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{6}$, т. е. $x_1 = \frac{6}{6} = 1$ и $x_2 = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$.

Ответ: 1 и $-\frac{2}{3}$.

5. Построим графики функций $y_1 = x^2$ (парабола) и $y_2 = x + 1$ (прямая).



Видно, что графики пересекаются в двух точках A и B. Абсциссы этих точек дают решение уравнения $x^2 = x + 1$. Приближенно корни равны $x_1 \approx -0{,}6$ и $x_2 \approx 1{,}6$.

Ответ: $-0{,}6$ и $1{,}6$.

6. Пусть скорость течения реки x км/ч. Тогда скорость лодки против течения реки равна $(12 - x)$ км/ч и на путь 25 км турист затрачивает время $\frac{25}{12 - x}$ ч. Плот, очевидно, движется со скоростью течения реки x км/ч и затрачивает на путь 25 км $\frac{25}{x}$ ч. По условию на движение в лодке было затрачено на 10 ч меньше, чем на движение

на плоту. Поэтому получаем дробное рациональное уравнение $\frac{25}{x}-\frac{25}{12-x}=10$.

Умножим обе части уравнения на общий знаменатель дробей и получим: $25(12-x)-25x=10x(12-x)$ или $5(12-x)-5x=2x(12-x)$. Раскроем скобки и приведем подобные члены: $60-5x-5x=24x-2x^2$, или $2x^2-34x+60=0$, или $x^2-17x+30=0$. Корни этого квадратного уравнения $x_1=2$ и $x_2=15$ (не подходит, т. к. $x<12$).

Ответ: 2 км/ч.

7. Для квадратного уравнения $2x^2+5x+1=0$ запишем теорему Виета: $x_1+x_2=-\frac{5}{2}$ и $x_1x_2=\frac{1}{2}$. Найдем значение данного выражения: $x_1x_2^2+x_1^2x_2=x_1x_2\left(x_2+x_1\right)=x_1x_2\left(x_1+x_2\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{5}{4}$.

Ответ: $-\frac{5}{4}$.

8. Один корень уравнения $2x^2-1999x+1997=0$ легко угадать ($x_1=1$). Проверим его, подставив в выражение: $2\cdot1^2-1999\cdot1+1997=0$ (верное равенство). Для нахождения второго корня запишем теорему Виета для произведения корней: $x_1x_2=\frac{1997}{2}$, откуда $x_2=\frac{1997}{2x_1}=\frac{1997}{2}$.

Легко проверить, что найденные корни x_1 и x_2 удовлетворяют теореме Виета для суммы корней $x_1+x_2=1+\frac{1997}{2}=\frac{1999}{2}$.

Ответ: 1 и $\frac{1997}{2}$.

9. Для квадратного уравнения $4x^2-7ax+3a^2=0$ найдем дискриминант $D=(-7a)^2-4\cdot4\cdot3a^2=a^2$ и корни $x_{1,2}=\frac{7a\pm a}{8}$, т. е. $x_1=\frac{8a}{8}=a$ и $x_2=\frac{6a}{8}=\frac{3}{4}a$.

Ответ: a и $\frac{3}{4}a$.

10. Преобразуем данное выражение $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_2^2+x_1^2}{x_1^2x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{(x_1x_2)^2}$. Для квадратного уравнения $3x^2+5x+1=0$ запишем теорему Виета: $x_1+x_2=-\frac{5}{3}$ и $x_1x_2=\frac{1}{3}$. Найдем сумму квадратов корней $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(-\frac{5}{3}\right)^2-2\cdot\frac{1}{3}=\frac{25}{9}-\frac{2}{3}=\frac{19}{9}$ и значение данного выражения $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{19/9}{(1/3)^2}=19$.

Ответ: 19.

11. Для квадратного уравнения $x^2-8x+a=0$ запишем теорему Виета: $x_1+x_2=8$. По условию $3x_1+4x_2=29$. Для нахождения корней x_1 и x_2 решим систему линейных уравнений $\begin{cases}x_1+x_2=8,\\3x_1+4x_2=29\end{cases}$ способом подстановки. Выразим из первого уравнения $x_2=8-x_1$ и подставим во второе уравнение: $3x_1+4(8-x_1)=29$ или $3x_1+32-4x_1=29$, откуда $x_1=3$. Теперь находим $x_2=8-x_1=$ $=8-3=5$. Используя теорему Виета, найдем значение параметра $a=x_1x_2=3\cdot5=15$.

Ответ: $a=15$, $x_1=3$ и $x_2=5$.

12. Очевидно, что уравнение $(a-3)x^2+ax-2a+3=0$ при $a-3=0$ (т. е. при $a=3$) является линейным, а при $a-3\neq0$ (т. е. при $a\neq3$) будет квадратным. Решим эти уравнения.

Подставим значение $a=3$ в данное уравнение и получим линейное уравнение $3x-3=0$, корень которого $x=1$.

При $a\neq3$ найдем дискриминант данного квадратного уравнения $D=a^2-4(a-3)(-2a+3)=a^2+8a^2-12a-24a+36=9a^2-36a+36=$ $=(3a-6)^2$ и его корни $x_{1,2}=\frac{-a\pm(3a-6)}{2(a-3)}$, т. е. $x_1=\frac{-a+(3a-6)}{2(a-3)}=$

$$=\frac{2a-6}{2(a-3)}=\frac{2(a-3)}{2(a-3)}=1 \text{ и } x_2=\frac{-a-(3a-6)}{2(a-3)}=\frac{6-4a}{2(a-3)}=\frac{2(3-2a)}{2(a-3)}=$$

$$=\frac{3-2a}{a-3}.$$

Заметим, что квадратное уравнение можно решить и по-другому. Один корень $x_1 = 1$ легко угадать. Проверим: $(a-3)\cdot 1^2 + a\cdot 1 - 2a + 3 = a - 3 + a - 2a + 3 = 0$ (верное равенство). Тогда другой корень найдем, используя теорему Виета: $x_1x_2 = \dfrac{3-2a}{a-3}$, откуда

$$x_2 = \frac{3-2a}{(a-3)x_1} = \frac{3-2a}{a-3}.$$

Ответ: при $a = 3$ $x = 1$, при $a \neq 3$ $x_1 = 1$ и $x_2 = \dfrac{3-2a}{a-3}$.

13. Общий знаменатель дробей в уравнении $\dfrac{x+3a}{x+a} - \dfrac{x+a}{x-a} = \dfrac{2a-3a^2}{x^2-a^2}$ равен $(x+a)(x-a)$. Учтем, что он не равен нулю, и умножим обе части уравнения на общий знаменатель. Получаем: $(x+3a)(x-a)-(x+a)(x+a) = 2a-3a^2$, или $x^2 - ax + 3ax - 3a^2 - x^2 - 2ax - a^2 = 2a - 3a^2$, или $0\cdot x = a^2 + 2a$, или $0 \cdot x = a(a+2)$. Так как левая часть уравнения равна нулю, то и правая часть должна равняться нулю, т. е. $a(a+2) = 0$, откуда $a = 0$ или $a = -2$.

При $a = 0$ уравнение имеет вид $0 \cdot x = 0$ и его решением является любое число x. Однако, надо учесть, что общий знаменатель $(x+a)(x-a) \neq 0$, или $(x+0)(x-0) \neq 0$, или $x^2 \neq 0$, т. е. $x \neq 0$. Итак, при $a = 0$ x – любое число, кроме нуля.

При $a = -2$ уравнение также имеет вид $0\cdot x = 0$ и его решением является любое число x. Учтем, что общий знаменатель $(x+a)(x-a) \neq 0$ или $(x-2)(x+2) \neq 0$, т. е. $x \neq \pm 2$. Итак, при $a = -2$ x – любое число, кроме ± 2.

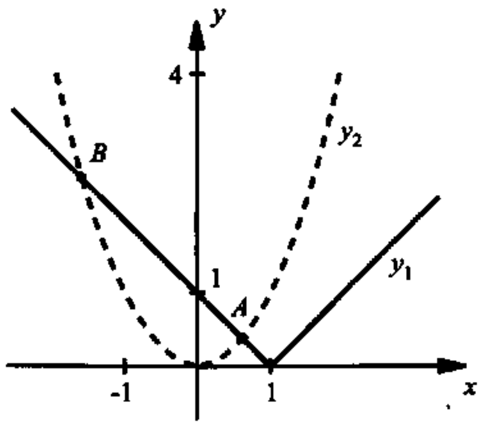
При $a \neq 0$ и $a \neq -2$ уравнение корней не имеет.

Ответ: при $a \neq 0$ и $a \neq -2$ корней нет; при $a = 0$ x – любое число, кроме 0; при $a = -2$ x – любое число, кроме чисел ± 2.

14. Сначала решим уравнение $|x-1| = x^2$ аналитически. Надо рассмотреть два случая.

а) $x - 1 = x^2$ или $0 = x^2 - x + 1$. Дискриминант D этого квадратного уравнения отрицательный, и оно не имеет корней.

б) $x - 1 = -x^2$ или $x^2 + x - 1 = 0$. Это уравнение имеет два корня $x_{1,2} = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \approx \dfrac{-1\pm 2,2}{2}$, т. е. $x_1 \approx 0,6$ и $x_2 \approx -1,6$. Эти корни удовлетворяют данному уравнению.



Теперь решим данное уравнение графически. Для этого построим графики функций $y_1 = |x - 1|$ и $y_2 = x^2$. Видно, что эти графики пересекаются в двух точках A и B. Абсциссы этих точек являются корнями уравнения $|x - 1| = x^2$. Приближенное значение этих корней $x_1 \approx 0{,}6$ и $x_2 \approx -1{,}6$.

Ответ: $x_1 \approx 0{,}6$ и $x_2 \approx -1{,}6$.

Вариант 2

1. Уравнение $2x^2 - 10 = 0$ запишем в виде $2x^2 = 10$. Разделим обе части уравнения на число 2 (не равное нулю) и получим: $x^2 = 5$. Корни этого уравнения $x_1 = -\sqrt{5}$ и $x_2 = \sqrt{5}$.

Ответ: $-\sqrt{5}$ и $\sqrt{5}$.

2. Левую часть уравнения $4x^2 + 7x = 0$ разложим на множители и получим: $x(4x + 7) = 0$. Так как произведение двух множителей равно нулю, то хотя бы один из них равен нулю. Получаем: $x_1 = 0$ или $4x + 7 = 0$ (корень этого линейного уравнения $x_2 = -\dfrac{7}{4}$).

Ответ: 0 и $-\dfrac{7}{4}$.

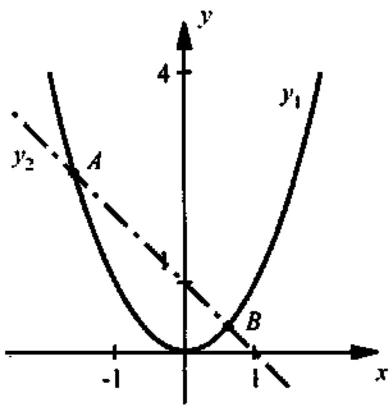
3. Разделим обе части уравнения $-5x^2 = 0$ на число -5 (не равное нулю) и получим: $x^2 = 0$. Это уравнение имеет единственный корень $x = 0$.

Ответ: 0.

4. Найдем дискриминант квадратного уравнения $4x^2 - 3x - 1 = 0$ и получим: $D = (-3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1) = 25$. Теперь находим корни уравнения $x_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{8}$, т. е. $x_1 = \frac{8}{8} = 1$ и $x_2 = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$.

Ответ: 1 и $-\frac{1}{4}$.

5. Построим графики функций $y_1 = x^2$ (парабола) и $y_2 = 1 - x$ (прямая).



Видно, что графики пересекаются в двух точках A и B. Абсциссы этих точек дают решение уравнения $x^2 = 1 - x$. Приближенно корни равны $x_1 \approx -1{,}6$ и $x_2 \approx 0{,}6$.

Ответ: $-1{,}6$ и $0{,}6$.

6. Пусть скорость течения реки x км/ч. Тогда скорость лодки против течения реки равна $(10 - x)$ км/ч и на путь 35 км турист затрачивает время $\frac{35}{10-x}$ ч. Скорость течения реки в притоке равна $10 - (x + 1) = 9 - x$ (км/ч). На путь 18 км затрачивается время $\frac{18}{9-x}$ ч. По условию на весь путь было затрачено 8 ч. Поэтому получаем дробное рациональное уравнение $\frac{35}{10-x} + \frac{18}{9-x} = 8$.

Умножим обе части уравнения на общий знаменатель дробей и получим: $35(9 - x) + 18(10 - x) = 8(10 - x)(9 - x)$. Раскроем скобки и приведем подобные члены: $315 - 35x + 180 - 18x = 720 - 80x -$

$-72x + 8x^2$ или $0 = 8x^2 - 99x + 225$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = 3$ и $x_2 = \frac{75}{8}$ (не подходит, т. к. $x < 9$).

Ответ: 3 км/ч.

7. Для квадратного уравнения $3x^2 + 5x + 1 = 0$ запишем теорему Виета: $x_1 + x_2 = -\frac{5}{3}$ и $x_1x_2 = \frac{1}{3}$. Найдем значение данного выражения: $x_1 - x_1x_2 + x_2 = (x_1 + x_2) - x_1x_2 = -\frac{5}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{6}{3} = -2$.

Ответ: -2.

8. Один корень уравнения $3x^2 - 1997x + 1994 = 0$ легко угадать ($x_1 = 1$). Проверим его, подставив в выражение: $3 \cdot 1^2 - 1997 \cdot 1 + 1994 = 0$ (верное равенство).

Для нахождения второго корня запишем теорему Виета для произведения корней: $x_1x_2 = \frac{1994}{3}$, откуда $x_2 = \frac{1994}{3x_1} = \frac{1994}{3}$. Легко проверить, что найденные корни x_1 и x_2 удовлетворяют теореме Виета для суммы корней $x_1 + x_2 = 1 + \frac{1994}{3} = \frac{1997}{3}$.

Ответ: 1 и $\frac{1994}{3}$.

9. Для квадратного уравнения $3x^2 - 5ax + 2a^2 = 0$ найдем дискриминант $D = (-5a)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2a^2 = a^2$ и корни $x_{1,2} = \frac{5a \pm a}{6}$, т. е. $x_1 = \frac{6a}{6} = a$ и $x_2 = \frac{4a}{6} = \frac{2}{3}a$.

Ответ: a и $\frac{2}{3}a$.

10. Преобразуем данное выражение $x_1^3x_2 + x_1x_2^3 = x_1x_2(x_1^2 + x_2^2)$. Для квадратного уравнения $2x^2 + 5x + 1 = 0$ запишем теорему Виета: $x_1 + x_2 = -\frac{5}{2}$ и $x_1x_2 = \frac{1}{2}$. Найдем сумму квадратов корней

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(-\frac{5}{2}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}=\frac{25}{4}-1=\frac{21}{4}$ и значение данного выражения $x_1^3x_2+x_1x_2^3=\frac{1}{2}\cdot\frac{21}{4}=\frac{21}{8}$.

Ответ: $\frac{21}{8}$.

11. Для квадратного уравнения $3x^2+2x+a=0$ запишем теорему Виета: $x_1+x_2=-\frac{2}{3}$ или $3x_1+3x_2=-2$. По условию $2x_1+3x_2=0$. Для нахождения корней x_1 и x_2 решим систему линейных уравнений $\begin{cases}3x_1+3x_2=-2,\\2x_1+3x_2=0\end{cases}$ способом сложения. Вычитая из первого уравнения второе, получим $x_1=-2$. Теперь из второго уравнения найдем $x_2=-\frac{2}{3}x_1=-\frac{2}{3}\cdot(-2)=\frac{4}{3}$. Используя теорему Виета, получим: $x_1x_2=\frac{a}{3}$ или $a=3x_1x_2=3\cdot(-2)\cdot\frac{4}{3}=-8$.

Ответ: $a=-8$, $x_1=-2$ и $x_2=\frac{4}{3}$.

12. Очевидно, что уравнение $(a-2)x^2+2ax-3a+2=0$ при $a-2=0$ (т. е. при $a=2$) является линейным, а при $a-2\neq 0$ (т. е. при $a\neq 2$) будет квадратным. Решим эти уравнения.

Подставим значение $a=2$ в данное уравнение и получим линейное уравнение $4x-4=0$, корень которого $x=1$.

При $a\neq 2$ найдем дискриминант данного квадратного уравнения $D=(2a)^2-4(a-2)(-3a+2)=4a^2+12a^2-8a-24a+16=16a^2-32a+16=(4a-4)^2$ и его корни $x_{1,2}=\frac{-2a\pm(4a-4)}{2(a-2)}$, т. е.

$x_1=\frac{-2a+(4a-4)}{2(a-2)}=\frac{2a-4}{2(a-2)}=\frac{2(a-2)}{2(a-2)}=1$ и $x_2=\frac{-2a-(4a-4)}{2(a-2)}=$

$=\frac{4-6a}{2(a-2)}=\frac{2(2-3a)}{2(a-2)}=\frac{2-3a}{a-2}$.

Заметим, что квадратное уравнение можно решить и по-другому. Один корень $x_1=1$ легко угадать. Проверим: $(a-2)\cdot 1^2+2a\cdot 1-3a+2=$

$= a - 2 + 2a - 3a + 2 = 0$ (верное равенство). Тогда другой корень найдем, используя теорему Виета: $x_1x_2 = \dfrac{2-3a}{a-2}$, откуда $x_2 = \dfrac{2-3a}{(a-2)x_1} =$

$= \dfrac{2-3a}{a-2}$.

Ответ: при $a = 2$ $x = 1$, при $a \neq 2$ $x_1 = 1$ и $x_2 = \dfrac{2-3a}{a-2}$.

13. Общий знаменатель дробей в уравнении $\dfrac{x-4a}{x+2a} - \dfrac{12a^3}{x^2-4a^2} =$

$= \dfrac{x-8a}{x-2a}$ равен $(x + 2a)(x - 2a)$. Учтем, что он не равен нулю, и умножим обе части уравнения на общий знаменатель. Получаем: $(x - 4a)(x - 2a) - 12a^3 = (x - 8a)(x + 2a)$, или $x^2 - 2ax - 4ax + 8a^2 - 12a^3 = x^2 + 2ax - 8ax - 16a^2$, или $0 \cdot x = 12a^3 - 24a^2$, или $0 \cdot x = a^2(a - 2)$. Так как левая часть уравнения равна нулю, то и правая часть должна равняться нулю, т. е. $a^2(a - 2) = 0$, откуда $a = 0$ или $a = 2$.

При $a = 0$ уравнение имеет вид $0 \cdot x = 0$ и его решением является любое число x. Однако, надо учесть, что общий знаменатель $(x + 2a)(x - 2a) \neq 0$, или $(x + 0)(x - 0) \neq 0$, или $x^2 \neq 0$, т. е. $x \neq 0$. Итак, при $a = 0$ x – любое число, кроме нуля.

При $a = 2$ уравнение также имеет вид $0 \cdot x = 0$ и его решением является любое число x. Учтем, что общий знаменатель $(x + 2a)(x - 2a) \neq 0$ или $(x + 4)(x - 4) \neq 0$, т. е. $x \neq \pm4$. Итак, при $a = -2$ x – любое число, кроме ±4.

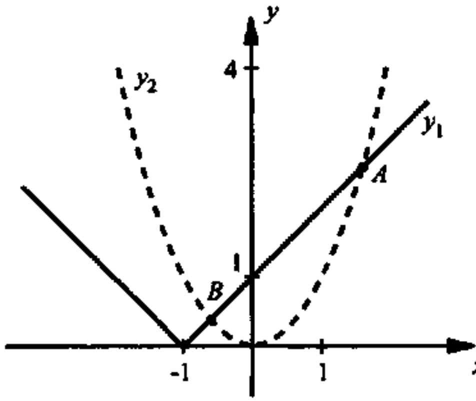
При $a \neq 0$ и $a \neq 2$ уравнение корней не имеет.

Ответ: при $a \neq 0$ и $a \neq 2$ корней нет; при $a = 0$ x – любое число, кроме 0; при $a = 2$ x – любое число, кроме чисел ±4.

14. Сначала решим уравнение $|x + 1| = x^2$ аналитически. Надо рассмотреть два случая.

а) $x + 1 = x^2$ или $0 = x^2 - x - 1$. Это уравнение имеет два корня $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \approx \dfrac{1 \pm 2{,}2}{2}$, т. е. $x_1 \approx 1{,}6$ и $x_2 \approx -0{,}6$. Эти корни удовлетворяют данному уравнению.

б) $x + 1 = -x^2$ или $x^2 + x + 1 = 0$. Дискриминант D этого квадратного уравнения отрицательный, и оно не имеет корней.



Теперь решим данное уравнение графически. Для этого построим графики функций $y_1 = |x + 1|$ и $y_2 = x^2$. Видно, что эти графики пересекаются в двух точках A и B. Абсциссы этих точек являются корнями уравнения $|x + 1| = x^2$. Приближенное значение этих корней $x_1 \approx 1{,}6$ и $x_2 \approx -0{,}6$.

Ответ: $x_1 \approx 1{,}6$ и $x_2 \approx -0{,}6$.

Глава 5. Неравенства

§ 31. Свойства числовых неравенств

Уроки 79–81. Числовые неравенства и их свойства

Цель: рассмотреть свойства числовых неравенств.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

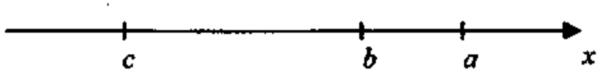
II. Изучение нового материала

Напомним понятие числового неравенства. Неравенство $a > b$ означает, что $a - b$ – положительное число, неравенство $a < b$ значит, что $a - b$ – отрицательное число. Для числовых неравенств выполняются определенные свойства, которые необходимо обсудить для дальнейшего изучения неравенств.

Свойство 1. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

Докажем это утверждение. Так как $a > b$ и $b > c$, то $a - b$ и $b - c$ – положительные числа. Сложим эти два положительных числа и получим: $(a - b) + (b - c) = a - c$ – также положительное число. Это означает, что $a > c$.

Это свойство можно обосновать, используя геометрическую модель множества действительных чисел – числовую прямую. Неравенство $a > b$ означает, что на числовой прямой точка a расположена правее точки b, неравенство $b > c$ – что точка b расположена правее точки c. Тогда точка a расположена правее точки c, т. е. $a > c$.

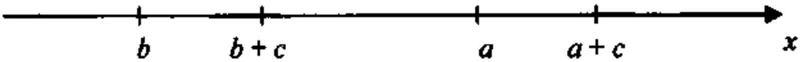


Свойство 1 называют свойством **транзитивности**.

Свойство 2. Если $a > b$, то $a + c > b + c$.

Найдем разность чисел $a + c$ и $b + c$ и получим: $(a + c) - (b + c) = a - b$. Очевидно, что $a - b$ положительное, т. к. $a > b$. Это означает, что число $(a + c) - (b + c)$ положительное, т.е. $a + c > b + c$. Таким образом, утверждение доказано.

Смысл доказанного неравенства: **если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же число, то знак неравенства сохранится.** Геометрическая иллюстрация этого свойства приведена на рисунке.

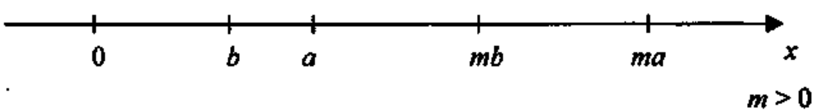


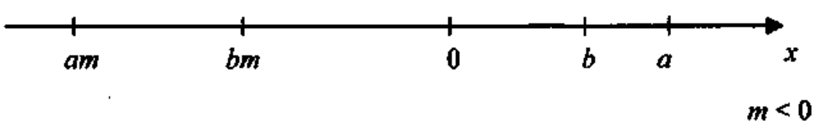
Так как $a > b$, то точка a на координатной оси расположена правее точки b. Точка $a + c$ смещена относительно точки a на такое же расстояние, как и точка $b + c$ относительно точки b. Поэтому точка $a + c$ расположена на оси правее точки $b + c$. Следовательно, $a + c > b + c$.

Свойство 3. Если $a > b$ и $m > 0$, то $am > bm$; если $a > b$ и $m < 0$, то $am < bm$.

Докажем это утверждение. Рассмотрим разность чисел am и bm и получим: $am - bm = m(a - b)$. Число $a - b$ положительное, т. к. $a > b$. Тогда при $m > 0$ число $m(a - b)$ положительное, т. е. $am > bm$; при $m < 0$ число $m(a - b)$ отрицательное, т. е. $am < bm$.

Смысл этого неравенства: **если обе части неравенства умножить на одно и то же положительное число, то знак неравенства сохраняется; если обе части неравенства умножить на одно и то же отрицательное число, то знак неравенства меняется на противоположный**. Геометрическая иллюстрация свойства приведена на рисунке (для определенности числа a и b положительные).





Заметим, что доказанное **свойство относится и к делению обеих частей неравенства на одно и то же число m**, т. к. деление на m можно заменить умножением на число $\frac{1}{m}$.

В частности при умножении обеих частей неравенства $a > b$ на число -1 получим $-a < -b$. Другими словами, **если изменить знаки у обеих частей неравенства, то надо изменить знак и самого неравенства, т. е. если $a > b$, то $-a < -b$.**

Свойство 4. Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

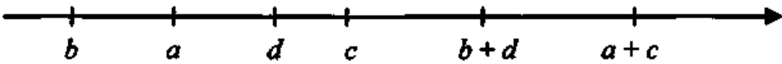
Докажем это утверждение двумя способами.

I способ. Так как $a > b$ и $c > d$, то числа $a - b$ и $c - d$ – положительные. Тогда и число $(a - b) + (c - d)$ положительное.

Теперь рассмотрим разность чисел $a + c$ и $b + d$ и получим: $(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d)$, т. е. положительное число. Таким образом $a + c > b + d$.

II способ. Так как $a > b$, то по свойству 2 $a + c > b + c$. Аналогично, т. к. $c > d$, то $c + b > d + b$. Учитывая, что $a + c > b + c$ и $b + c > b + d$, по свойству 1 получаем, что $a + c > b + d$.

Смысл этого свойства: **если сложить почленно два неравенства одного знака, то получим неравенство того же знака.** Иллюстрация этого свойства приведена на рисунке.



Свойство 5. Если a, b, c, d – положительные числа и $a > b$, $c > d$, то $ac > bd$.

Так как $a > b$ и $c > 0$, то по свойству 3 $ac > bc$. Аналогично, т. к. $c > d$ и $b > 0$, то $cb > db$. Учитывая, что $ac > bc$ и $bc > bd$, по свойству 1 получаем, что $ac > bd$.

Смысл доказанного свойства: **если перемножить почленно неравенства одного знака с положительными частями, то получим неравенство того же знака.**

Обратите внимание учащихся на **точную формулировку свойства**. Если среди чисел a, b, c, d имеются отрицательные, то неравенство $ac > bd$ может и не выполняться.

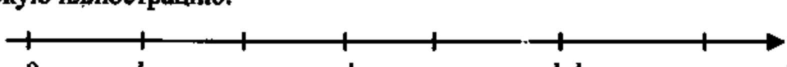
Пример 1

Рассмотрим неравенства:

а) $5 > -2$ и $4 > 3$. При почленном умножении этих неравенств получаем верное неравенство того же знака: $5 \cdot 4 > (-2) \cdot 3$ или $20 > -6$.

б) $5 > -2$ и $4 > -15$. При почленном умножении этих неравенств получаем неверное неравенство: $5 \cdot 4 > (-2) \cdot (-15)$ или $20 > 30$.

Разумеется, рассматриваемое неравенство также имеет графическую иллюстрацию.



Свойство 6. Если a и b – неотрицательные числа и $a > b$, то $a^n > b^n$, где n – любое натуральное число.

Свойство 6 сразу следует из свойства 5. Смысл свойства 6: **если неравенство с неотрицательными частями возвести в одну и ту же натуральную степень, то получим неравенство того же знака.**

Заметим, что **если n – нечетное число, то для любых чисел a и b из неравенства $a > b$ следует неравенство того же знака $a^n > b^n$.**

В приведенных доказательствах были использованы две идеи:

1) рассмотреть разность левой и правой частей неравенства и определить знак этой разности;

2) использовать при доказательстве нового свойства уже доказанные свойства.

Эти же идеи используют и в других задачах, связанных с неравенствами.

Пример 2

Пусть a и b – положительные числа и $a > b$. Докажем, что выполняется неравенство $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Обе части данного неравенства $a > b$ разделим на положительное число ab и получим неравенство того же знака (по свойству 3): $\frac{a}{ab} > \frac{b}{ab}$, или $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$, или $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Пример 3

Оценим периметр квадрата со стороной a см, если известно, что $18{,}1 < a < 18{,}2$.

Периметр квадрата со стороной a равен $P = 4a$. Поэтому умножим все части данного двойного неравенства $18{,}1 < a < 18{,}2$ на положительное число 4. По свойству 3 получаем верное двойное неравенство того же знака $18{,}1 \cdot 4 < a \cdot 4 < 18{,}2 \cdot 4$ или $72{,}4 < P < 72{,}8$. Итак, периметр P квадрата больше 72,4 см, но меньше 72,8 см.

Пример 4

Пусть $33 < a < 34$ и $2 < b < 3$. Оценим сумму, разность, произведение и частное чисел a и b.

а) Почленно сложим два данных двойных неравенства одного знака и получим верное неравенство того же знака: $33 + 2 < a + b < 34 + 3$ или $35 < a + b < 37$.

б) Для оценки разности чисел $a - b$ сначала оценим число $-b$. Для этого умножим все части неравенства $2 < b < 3$ на отрицательное число -1. Знак неравенства при этом изменится на противоположный: $2\cdot(-1) > b\cdot(-1) > 3\cdot(-1)$ или $-2 > -b > -3$, т. е. $-3 < -b < -2$. Теперь почленно сложим два неравенства одного знака $33 < a < 34$

и $-3 < -b < -2$. Получим верное неравенство того же знака: $33 - 3 < a - b < 34 - 2$ или $30 < a - b < 32$.

в) Почленно умножим два неравенства одного знака $33 < a < 34$ и $2 < b < 3$ с положительными частями. Получим верное неравенство того же знака: $33 \cdot 2 < ab < 34 \cdot 3$ или $66 < ab < 102$.

г) Для оценки отношения $\frac{a}{b}$ сначала оценим число $\frac{1}{b}$. Так как в неравенстве $2 < b < 3$ все части положительны, то верно неравенство: $\frac{1}{2} > \frac{1}{b} > \frac{1}{3}$, т. е. $\frac{1}{3} < \frac{1}{b} < \frac{1}{2}$. Теперь почленно умножим два неравенства одного знака $33 < a < 34$ и $\frac{1}{3} < \frac{1}{b} < \frac{1}{2}$ с положительными частями. Получим верное неравенство того же знака: $33 \cdot \frac{1}{3} < a \cdot \frac{1}{b} < 34 \cdot \frac{1}{2}$ или $11 < \frac{a}{b} < 17$.

Пример 5

Докажем неравенство $a^2 + 5 > 4a$.

Рассмотрим верное неравенство $(a - 2)^2 + 1 > 0$ (сумма неотрицательного выражения $(a - 2)^2$ и положительного числа 1 будет положительной величиной), или $a^2 - 4a + 4 + 1 > 0$, или $a^2 - 4a + 5 > 0$. К обеим частям этого верного неравенства прибавим одно и то же число $4a$. Тогда по свойству 2 получаем также верное неравенство $a^2 - 4a + 5 + 4a > 0 + 4a$ или $a^2 + 5 > 4a$, что и требовалось доказать.

Пример 6

При любых значениях переменной a сравним значения выражений $(a - 2)(a - 7)$ и $(a - 4)(a - 5)$.

Найдем разность данных выражений: $(a - 2)(a - 7) - (a - 4)(a - 5) = (a^2 - 7a - 2a + 14) - (a^2 - 5a - 4a + 20) = (a^2 - 9a + 14) - (a^2 - 9a + 20) = -6$. При любом значении a рассматриваемая разность отрицательна. Поэтому по определению первое выражение меньше второго, т. е. $(a - 2)(a - 7) < (a - 4)(a - 5)$.

Пример 7

Если числа $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то выполняется неравенство $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Заметим, что выражение $\frac{a+b}{2}$ называется **средним арифметическим** чисел a и b, выражение $\sqrt{ab}$ называется **средним геометри-**

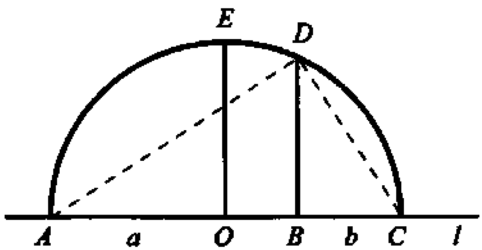
ческим чисел a и b. Поэтому неравенство $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ называется **неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим** (неравенство Коши). При этом равенство выполняется только при $a = b$ (т. е. среднее арифметическое чисел a и b равно их среднему геометрическому).

Докажем это неравенство двумя способами: алгебраическим и геометрическим.

Алгебраический способ. Рассмотрим разность чисел $\frac{a+b}{2}$ и $\sqrt{ab}$ и определим знак этой разности, выделив полный квадрат разности. Получаем: $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$. Числитель этой дроби $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$ при всех значениях $a \geq 0$ и $b \geq 0$ неотрицателен, знаменатель положителен. Поэтому величина $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$. Тогда по определению получаем $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Дробь $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} = 0$ при $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$, т. е. при $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ или $a = b$.

Итак, неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим выполняется и превращается в равенство только при $a = b$.

Геометрический способ. На прямой l построим отрезки AB (длиной a) и BC (длиной b). Найдем середину отрезка AC – точку O. Из этой точки радиусом $R = \frac{AC}{2} = \frac{a+b}{2}$ проведем полуокружность. К прямой l из точек O и B восстановим перпендикуляры OE и BD до их пересечения с полуокружностью. Тогда длина отрезка $OE = \frac{a+b}{2}$ – среднее арифметическое чисел a и b. Докажем, что длина отрезка $BD = \sqrt{ab}$ – среднее геометрическое чисел a и b. Для этого рассмотрим прямоугольные треугольники ABD и CBD. Они подобны, т. к. $\angle ABD = \angle CBD = 90°$ и $\angle BAD = \angle BDC$ (углы со взаимно перпендикулярными сторонами). Учтем пропорциональность сторон: $\frac{BD}{AB}=\frac{BC}{BD}$ или $\frac{BD}{a}=\frac{b}{BD}$, откуда $BD^2 = ab$ и $BD=\sqrt{ab}$.



Из рисунка видно, что $OE \geq BD$ или $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$. При этом равенство выполняется, если точки O и B совпадают или $AB = BC$, т. е. $a = b$.

Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим очень часто используется при доказательстве неравенств.

Пример 8

Для всех чисел a и b докажем неравенство $\frac{a^2+b^2}{2}+1\geq$ $\geq\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}$.

Для положительных чисел $a^2 + 1$ и $b^2 + 1$ запишем неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим: $\frac{(a^2+1)+(b^2+1)}{2}\geq\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}$ или $\frac{a^2+b^2}{2}+1\geq\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}$, что и требовалось доказать.

Пример 9

Докажем неравенство $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$.

Для чисел a^2 и b^2 запишем неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим: $\frac{a^2+b^2}{2}\geq\sqrt{a^2\cdot b^2}=|ab|\geq ab$ (очевидно, что для любого числа x верно неравенство $|x| \geq x$). Было получено верное неравенство $\frac{a^2+b^2}{2}\geq ab$. Аналогично запишем еще два неравенства $\frac{b^2+c^2}{2}\geq bc$ и $\frac{a^2+c^2}{2}\geq ac$. Теперь почленно сложим три неравенства одного знака и получим верное неравенство того же знака: $\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{a^2+c^2}{2} \ge ab+bc+ac$ или $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ac$. Заметим, что неравенство обращается в равенство только при $a = b = c$ (именно в этом случае каждое из неравенств между средним арифметическим и средним геометрическим обращается в равенство).

III. Контрольные вопросы

1. Что означает неравенство $a > b$ ($a < b$)?

2. Перечислите основные свойства числовых неравенств.

3. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

IV. Задание на уроке

№ 31.14 (а, г); 31.17; 31.26 (а, б); 31.32 (в, г); 31.39 (а, в); 31.42 (б); 31.44 (а, б); 31.46 (в); 31.50 (а, б); 31.54; 31.58; 31.62.

V. Задание на дом

№ 31.14 (б, в); 31.18; 31.26 (в, г); 31.32 (а, б); 31.39 (б, г); 31.42 (в); 31.44 (в, г); 31.46 (г); 31.50 (в, г); 31.55; 31.59; 31.63.

VI. Творческие задания

1. Докажите неравенства (используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим):

а) $a^2 + b^2 \ge 2|ab|$;

б) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \ge 2$ (a, b – числа одного знака);

в) $\frac{9a}{b}+\frac{4b}{a} \ge 12$ (a, b – числа одного знака);

г) $\frac{a+4}{2}+\frac{a+9}{2} > 5\sqrt{a}$ $(a \ge 0)$;

д) $\frac{a+9}{2}+\frac{a+16}{2} > 7\sqrt{a}$ $(a \ge 0)$;

е) $(a^3+b)(a+b^3) \ge 4a^2b^2$ $(a, b \ge 0)$;

ж) $(a+1)(b+1)(ab+1) \ge 8ab$ $(a, b \ge 0)$;

з) $(a+b)(ab+9) \ge 12ab$ $(a, b \ge 0)$.

2. Найдите:

а) наименьшее значение выражения $x + y$, если $xy = 16$ и $x > 0$;

б) наименьшее значение выражения $3x + y$, если $xy = 12$ и $y > 0$;

в) наибольшее значение выражения xy, если $x + y = 8$ и $x, y > 0$;

г) наибольшее значение выражения xy, если $3x + 5y = 30$ и $x, y > 0$.
Ответы: а) 8; б) 12; в) 16; г) 15.

3. Найдите наименьшее значение выражения:

а) $3x + \dfrac{12}{x}$ $(x > 0)$;

б) $4x + \dfrac{9}{x}$ $(x > 0)$;

в) $\dfrac{(x+9)(x+4)}{x}$ $(x > 0)$;

г) $\dfrac{(x+5)(x+20)}{x}$ $(x > 0)$;

д) $\dfrac{2x^2 - 5x + 8}{x}$ $(x > 0)$;

е) $\dfrac{x^2 - 7x + 4}{x}$ $(x > 0)$.

Ответы и указания: а) 12; б) 12; в) 25, записать выражение в виде $\dfrac{x^2 + 13x + 36}{x} = \left(x + \dfrac{36}{x}\right) + 13$; г) 45, записать выражение в виде $\dfrac{x^2 + 25x + 100}{x} = \left(x + \dfrac{100}{x}\right) + 25$; д) 3, записать выражение в виде $\left(2x + \dfrac{8}{x}\right) - 5$; е) -3, записать выражение в виде $\left(x + \dfrac{4}{x}\right) - 7$.

4. Найдите наибольшее значение выражения:

а) $\dfrac{x}{4 + x^2}$ $(x > 0)$;

б) $\dfrac{x^2}{9x^4 + 4}$;

в) $\dfrac{5x}{(x+1)(x+9)}$ $(x > 0)$;

г) $\dfrac{3x}{(x+2)(x+18)}$ $(x > 0)$;

д) $\dfrac{2x}{x^2 + 6x + 25}$ $(x > 0)$;

е) $\frac{5x}{4x^2-7x+9}$ $(x>0)$.

Ответы: а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{12}$; в) $\frac{1}{16}$; г) $\frac{3}{32}$; д) $\frac{1}{8}$; е) 1.

Указание. Рассмотрите выражение обратное данному и найдите его наименьшее значение (аналогично заданию 3).

VII. Подведение итогов урока

§ 32. Исследование функций на монотонность

Уроки 82–83. Монотонность функции

Цель: обсудить монотонность основных изученных функций.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Сравните числа a и b, если выполнимо неравенство $3a + 17 < 3b + 15$.

2. Известно, что $6 < a < 7$ и $3 < b < 4$. Оцените значение выражения $5a - 2b$.

3. Найдите наименьшее значение выражения $\frac{4x^2+6x+9}{3x}$ $(x>0)$.

Вариант 1

1. Сравните числа a и b, если выполнимо неравенство $5a + 12 > 5b + 14$.

2. Известно, что $8 < a < 9$ и $2 < b < 3$. Оцените значение выражения $7a - 3b$.

3. Найдите наименьшее значение выражения $\frac{8x^2+5x+10}{5x}$ $(x>0)$.

III. Изучение нового материала

Знакомство с понятиями возрастающей и убывающей функции началось с 7-го класса. Однако при обсуждении таких вопросов мы в основном опирались на вид графика функции. Однако такой подход неверен по двум причинам:

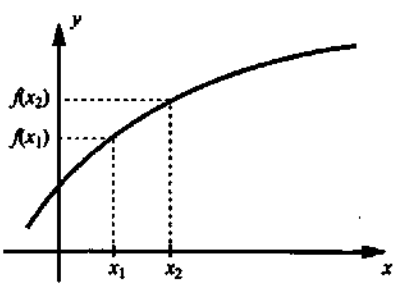
1) функция сначала должна быть исследована (в том числе на возрастание и убывание), а лишь затем должен быть построен ее график;

2) при построении графика могут быть допущены ошибки. Поэтому график служит только для иллюстрации тех или иных свойств функции.

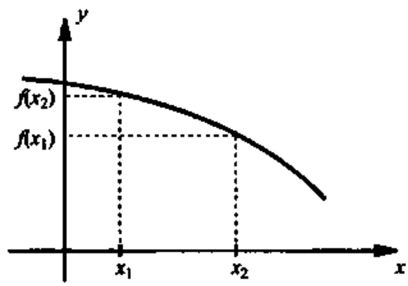
Дадим строгое определение **монотонности** (т. е. **возрастания или убывания**) функции.

Функцию $y = f(x)$ называют **возрастающей на промежутке** X, если из неравенства $x_2 > x_1$ (где x_1 и x_2 – любые две точки промежутка X) следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. Другими словами, **функция возрастает, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции**.

Функцию $y = f(x)$ называют **убывающей на промежутке** X, если из неравенства $x_2 > x_1$ (где x_1 и x_2 – любые две точки промежутка X) следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$. Другими словами, функция **убывает, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции**.



Возрастающая функция
$f(x_2) > f(x_1)$



Убывающая функция
$f(x_2) < f(x_1)$

Пример 1

Определим монотонность функции $y = -5x + 3$.

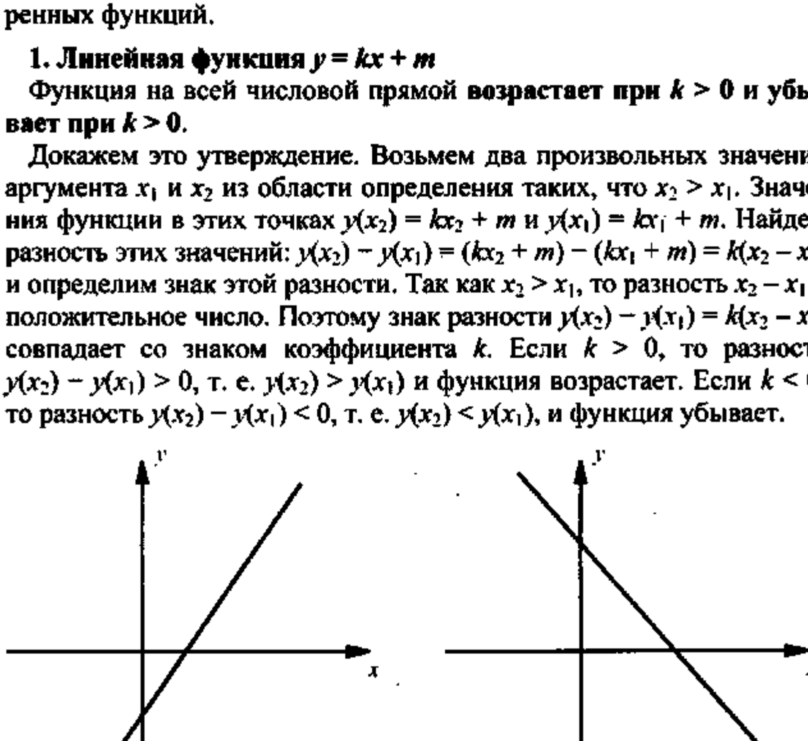
Функция определена на всех числовой оси, т. е. на промежутке $(-\infty; \infty)$. Возьмем два произвольных значения аргумента x_1 и x_2 из области определения таких, что $x_2 > x_1$. Значения функции в этих точках $y(x_1) = -5x_1 + 3$ и $y(x_2) = -5x_2 + 3$. Найдем разность этих значений и определим знак этой разности: $y(x_2) - y(x_1) = (-5x_2 + 3) - (-5x_1 + 3) = 5x_1 - 5x_2 = 5(x_1 - x_2)$. Так как $x_2 > x_1$, то разность $x_1 - x_2$ – отрицательное число. Поэтому разность $y(x_2) - y(x_1) = 5(x_1 - x_2)$ также число отрицательное, т. е. $y(x_2) < y(x_1)$. Таким образом, мы показали, что для данной функции из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $y(x_2) < y(x_1)$. Тогда по определению функция $y = -5x + 3$ убывает во всей области определения $(-\infty; \infty)$.

Теперь, используя приведенные определения и свойства числовых неравенств, обоснуем выводы о монотонности ранее рассмотренных функций.

1. Линейная функция $y = kx + m$

Функция на всей числовой прямой **возрастает при $k > 0$** и **убывает при $k > 0$**.

Докажем это утверждение. Возьмем два произвольных значения аргумента x_1 и x_2 из области определения таких, что $x_2 > x_1$. Значения функции в этих точках $y(x_2) = kx_2 + m$ и $y(x_1) = kx_1 + m$. Найдем разность этих значений: $y(x_2) - y(x_1) = (kx_2 + m) - (kx_1 + m) = k(x_2 - x_1)$ и определим знак этой разности. Так как $x_2 > x_1$, то разность $x_2 - x_1$ – положительное число. Поэтому знак разности $y(x_2) - y(x_1) = k(x_2 - x_1)$ совпадает со знаком коэффициента k. Если $k > 0$, то разность $y(x_2) - y(x_1) > 0$, т. е. $y(x_2) > y(x_1)$ и функция возрастает. Если $k < 0$, то разность $y(x_2) - y(x_1) < 0$, т. е. $y(x_2) < y(x_1)$, и функция убывает.



$k > 0$ $k < 0$

Может оказаться, что функция во всей области определения не является монотонной, но на различных промежутках области определения возрастает или убывает.

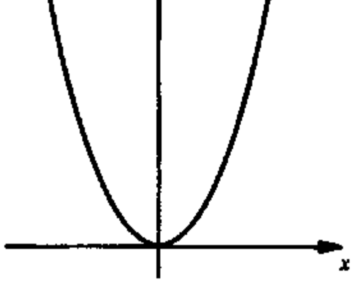
2. Квадратичная функция $y = kx^2$

При $k > 0$ функция **возрастает на промежутке $[0; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 0]$. При $k < 0$** функция **возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$ и убывает на промежутке $[0; +\infty)$.**

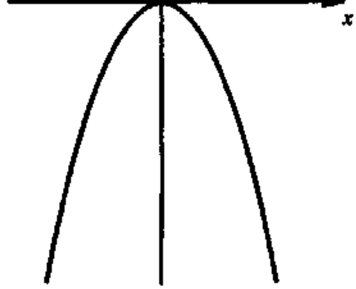
Докажем данное утверждение. Возьмем два произвольных значения аргумента x_1 и x_2 из области определения $(-\infty; \infty)$ функции таких, что $x_2 > x_1$. Значения функции в этих точках $y(x_2) = kx_2^2$ и $y(x_1) = kx_1^2$. Найдем разность этих значений: $y(x_2) - y(x_1) = = kx_2^2 - kx_1^2 = k(x_2^2 - x_1^2) = k(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$ и определим знак этой разности. Так как $x_2 > x_1$, то разность $x_2 - x_1$ – положительное число. Поэтому знак разности $y(x_2) - y(x_1) = k(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$ совпадает со знаком произведения $k(x_2 + x_1)$. Так как x_1 и x_2 могут принимать произвольные значения из области определения, то чтобы выражение $x_2 + x_1$ имело определенный знак, необходимо выделить два промежутка области определения.

1) Если мы рассмотрим промежуток $[0; +\infty)$, т. е. $0 \le x_1 < x_2$, то величина $x_2 + x_1 > 0$. Поэтому знак разности $y(x_2) - y(x_1)$ совпадает со знаком коэффициента k. Следовательно, на промежутке $[0; +\infty)$ функция $y = kx^2$ возрастает при $k > 0$ и убывает при $k < 0$.

2) Если рассмотреть промежуток $(-\infty; 0]$, т. е. $x_1 < x_2 \le 0$, то величина $x_2 + x_1 < 0$. Поэтому знак разности $y(x_2) - y(x_1)$ противоположен знаку коэффициента k. Следовательно, на промежутке $(-\infty; 0]$ функция $y = kx^2$ убывает при $k > 0$ и возрастает при $k < 0$.



$k > 0$

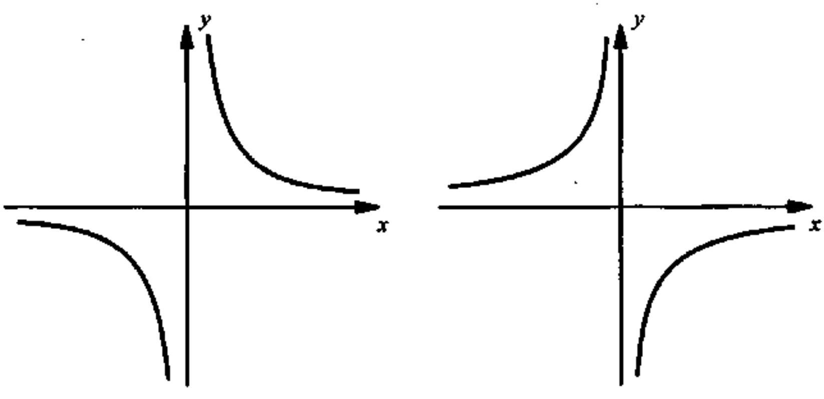


$k < 0$

3. Обратная пропорциональность $y = \dfrac{k}{x}$

На промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ функция **убывает при $k > 0$** и **возрастает при $k < 0$.**

Возьмем два произвольных значения аргумента x_1 и x_2 из области определения функции таких, что $x_2 > x_1$. Значения функции в этих точках $y(x_2) = \frac{k}{x_2}$ и $y(x_1) = \frac{k}{x_1}$. Найдем разность этих значений: $y(x_2) - y(x_1) = \frac{k}{x_2} - \frac{k}{x_1} = \frac{kx_1 - kx_2}{x_1 x_2} = \frac{k(x_1 - x_2)}{x_1 x_2}$ и определим знак этой разности. Так как $x_2 > x_1$, то разность $x_1 - x_2$ – отрицательное число. Поэтому знак разности $y(x_2) - y(x_1) = \frac{kx_1 - kx_2}{x_1 x_2}$ противоположен знаку частного $\frac{k}{x_1 x_2}$. Так как функция $y = \frac{k}{x}$ не определена в точке $x = 0$, а x_1 и x_2 могут принимать произвольные значения из области определения, то выделим два промежутка области определения $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, т. е. $x_{1,2} < 0$ и $x_{1,2} > 0$. Для каждого из этих промежутков произведение $x_1 x_2$ положительно. Поэтому знак разности $y(x_2) - y(x_1)$ противоположен знаку коэффициента k. Следовательно, при $k > 0$ разность $y(x_2) - y(x_1) < 0$, т. е. $y(x_2) < y(x_1)$, и функция убывает. При $k < 0$ разность $y(x_2) - y(x_1) > 0$, т. е. $y(x_2) > y(x_1)$, и функция возрастает.



$k > 0$ $\qquad\qquad$ $k < 0$

4. Корневая зависимость $y = \sqrt{x}$

Функция возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.

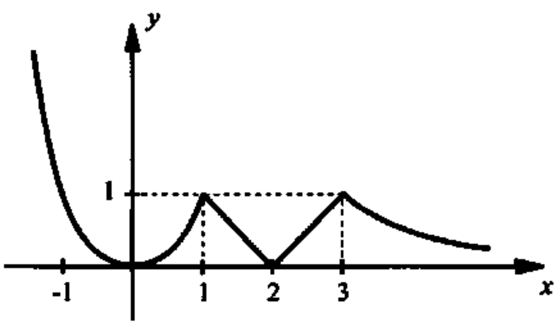
Возьмем два произвольных значения аргумента x_1 и x_2 из области определения $[0; +\infty)$ функции таких, что $x_2 > x_1$. Значения функции в этих точках $y(x_2)=\sqrt{x_2}$ и $y(x_1)=\sqrt{x_1}$. Найдем разность этих значений $y(x_2)-y(x_1)=\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}$. Умножим и разделим это выражение на сопряженную величину и получим: $y(x_2)-y(x_1)=$ $=\dfrac{(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1})}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}=\dfrac{x_2-x_1}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}$. Так как $x_2 > x_1$, то разность $x_2 - x_1$ – положительное число. Знаменатель $\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}$ также положительное число. Поэтому разность $y(x_2) - y(x_1) > 0$, т. е. $y(x_2) > y(x_1)$, и функция $y=\sqrt{x}$ возрастает в области определения.

Используем полученные знания для исследования функции.

Пример 2

Построить и перечислить свойства графика функции $y = f(x)$, где

$$f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ если } x<1, \\ |x-2|, \text{ если } 1\le x\le 3, \\ \dfrac{3}{x}, \text{ если } x>3. \end{cases}$$



На указанных промежутках построим графики соответствующих функций. Перечислим свойства данной функции:

1) область определения функции – вся числовая прямая;

2) значение $y = 0$ при $x = 0$ и $x = 2$, $y > 0$ при остальных значениях x;

3) функции я возрастает на промежутках $[0; 1]$ и $[2; 3]$ и убывает на промежутках $(-\infty; 0]$, $[1; 2]$ и $[3; +\infty)$.

4) функция ограничена снизу и не ограничена сверху;

5) наименьшее значение $y_{наим} = 0$ достигается при $x = 0$ и $x = 2$;

6) функция непрерывна;

7) область значений функции – промежуток $[0; +\infty)$.

IV. Контрольные вопросы

1. Дайте определение возрастающей функции.
2. Определение убывающей функции.
3. Монотонность линейной функции $y = kx + m$.
4. Возрастание и убывание квадратичной функции $y = kx^2$.
5. Монотонность обратно пропорциональной зависимости $y = \dfrac{k}{x}$.
6. Возрастание корневой зависимости $y = \sqrt{x}$.

V. Задание на уроке

№ 32.1; 32.3 (а, г); 32.4; 32.6 (а, б); 32.7 (в, г); 32.8 (а, б); 32.9 (б); 32.10 (б, в); 32.12; 32.14 (а).

VI. Задание на дом

№ 32.2; 32.3 (б, в); 32.5; 32.6 (в, г); 32.7 (а, б); 32.8 (в, г); 32.9 (г); 32.10 (г); 32.13; 32.14 (б).

VII. Подведение итогов урока

§ 33. Решение линейных неравенств

Уроки 84–85. Линейные неравенства

Цель: рассмотреть преобразования неравенств и решение линейных неравенств.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Определение возрастающей функции.
2. Монотонность квадратичной функции $y = kx^2$ (без доказательства).
3. Исследуйте на монотонность функцию (с обоснованием):
   а) $y = -7x - 2$;
   б) $y = 2x^2 + 1$;

в) $y = \frac{x+3}{x+1}$.

Вариант 2

1. Определение убывающей функции.

2. Монотонность обратно пропорциональной зависимости $y = \frac{k}{x}$ (без доказательства).

3. Исследуйте на монотонность функцию (с обоснованием):

а) $y = 4x + 3$;

б) $y = -3x^2 + 2$;

в) $y = \frac{x+3}{x+5}$.

III. Изучение нового материала

Пример 1

Рассмотрим неравенство $x^2 + 16 > 10x$. При одних значениях переменной x данное неравенство обращается в верное числовое неравенство, а при других – нет. Например, подставим вместо x число 9 и получим верное неравенство: $9^2 + 16 > 10 \cdot 9$ или $97 > 90$. Если вместо x подставим число 5, получим неверное неравенство: $5^2 + 16 > 10 \cdot 5$ или $41 > 50$. Поэтому число 9 является решением данного неравенства $x^2 + 16 > 10x$ или удовлетворяет этому неравенству. Легко проверить, что решениями этого неравенства являются, например, числа -2; 1; 10; 100. Напротив, числа 2; 4; 6; 7 не являются решениями данного неравенства.

Решением неравенства с одной переменной называют такое **значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство. Решить неравенство** – значит **найти все его решения или доказать, что решений нет.** Неравенства, **имеющие одни и те же решения**, называются **равносильными.** Неравенства, **не имеющие решений**, также считают **равносильными.**

Пример 2

а) Неравенства $2x - 6 > 0$ и $\frac{7}{3x-9} \geq 0$ равносильны, т. к. решением каждого неравенства являются числа, большие числа 3, т. е. $x > 3$.

б) Неравенства $x^2 + 4 \leq 0$ и $|x| + 3 < 0$ также равносильны, т. к. не имеют решений.

в) Неравенства $3x - 6 \geq 0$ и $2x > 8$ неравносильны, т. к. решение первого неравенства $x \geq 2$, а решение второго неравенства $x > 4$.

При решении неравенств используются следующие **свойства:**

1) Если **из одной части** неравенства **перенести в другую любой член с противоположным знаком**, то получится **равносильное** ему неравенство.

2) Если **обе части** неравенства **умножить** или **разделить на** одно и то же **положительное число**, то получится **равносильное** ему неравенство.

3) Если **обе части** неравенства **умножить** или **разделить** на одно и то же **отрицательное число, изменив** при этом **знак неравенства на противоположный**, то получится **равносильное** ему неравенство.

Пример 3

Неравенство $24 - 3x \leq 0$ равносильно неравенству $-3x \leq -24$ (перенесли число 24, изменив знак на противоположный, в правую часть). Неравенство $-3x \leq -24$ равносильно неравенству $x \geq 8$ (разделили обе части на отрицательное число -3 и изменили знак неравенства на противоположный), что и является решением данного неравенства $24 - 3x \leq 0$.

Свойства 1–3 неравенств можно доказать, используя свойства числовых неравенств. Пусть некоторое число a является решением неравенства $24 - 3x \leq 0$, т. е. обращает его в верное числовое неравенство $24 - 3a \leq 0$. Прибавим к обеим частям этого неравенства -24 и получим верное неравенство $24 - 3a - 24 \leq 0 -24$ или $-3\,a \leq -24$. Это неравенство означает, что число a является решением неравенства $-3x \leq -24$.

Было доказано, что каждое решение неравенства $24 - 3x \leq 0$ является и решением неравенства $-3x \leq -24$. Рассуждая аналогично, можно показать, что каждое решение неравенства $-3x \leq -24$ будет и решением неравенства $24 -3x \leq 0$. Таким образом, неравенства $24 -3x \leq 0$ и $-3x \leq -24$ имеют одни и те же решения, т. е. являются равносильными. Подобными рассуждениями можно показать, что неравенства $-3x \leq -24$ и $x \geq 8$ также будут равносильными.

Аналогично доказывается, что и в общем случае свойства 1–3 неравенств выполняются.

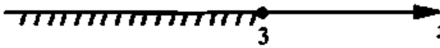
Рассмотрим решение **линейных неравенств**.

Неравенство вида $ax+b \vee 0$ (где $\vee$ – знак сравнения, может быть одним из следующих: >, ≥, <, ≤) называют **линейным** неравенством **с одной переменной**. Заметим, что левая часть линейного неравенства является линейной функцией.

Пример 4

Решим неравенство $8x \leq 3x + 15$.

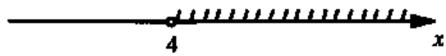
Перенесем слагаемое $3x$ с противоположным знаком в левую часть неравенства: $8x - 3x \le 15$. Приведем подобные члены: $5x \le 15$. Разделим обе части неравенства на положительное число 5 (при этом знак неравенства сохраняется) и получаем: $x \le 3$. Множество решений данного неравенства состоит из чисел, которые меньше или равны числу 3. Такое множество представляет собой числовой промежуток $(-\infty; 3]$, изображенный на рисунке.



Пример 5

Решим неравенств $3(2x - 1) > 2(x + 2) + x + 5$.

Раскроем скобки в обеих частях неравенства: $6x - 3 > 2x + 4 + x + 5$. Приведем в правой части подобные члены: $6x - 3 > 3x + 9$. Перенесем с противоположным знаком член $3x$ из правой части в левую, а член -3 из левой части в правую: $6x - 3x > 9 + 3$. Опять приведем подобные члены в обеих частях неравенства: $3x > 12$. Разделим обе части неравенства на положительное число 3 (при этом знак неравенства сохраняется) и получаем: $x > 4$. Множество решений данного неравенства состоит из всех чисел, больших 4. Такое множество представляет собой промежуток $(4; +\infty)$, изображенный на рисунке.



Пример 6

Решим неравенство $\dfrac{3x+2}{4} + \dfrac{x-1}{3} > \dfrac{x+2}{6} + 9$.

Наименьший общий знаменатель дробей, входящих в неравенство, равен 12. Поэтому умножим обе части неравенства на положительное число 12 (знак неравенства при этом сохраняется) и получаем: $\dfrac{3x+2}{4} \cdot 12 + \dfrac{x-1}{3} \cdot 12 > \dfrac{x+2}{6} \cdot 12 + 9 \cdot 12$, или $(3x + 2) \cdot 3 + (x - 1) \cdot 4 >$ $> (x + 2) \cdot 2 + 108$, или $9x + 6 + 4x - 4 > 2x + 4 + 108$. Приведем подобные члены в обеих частях неравенства: $13x + 2 > 2x + 112$. Перенесем член $2x$ в левую часть неравенства, а число 2 – в правую: $13x - 2x > 112 - 2$. Приведем подобные члены: $11x > 110$. Разделим обе части неравенства на положительное число 11 и получим: $x > 10$, т. е. промежуток $(10; +\infty)$.

Разумеется, как и линейное уравнение, **линейное неравенство может не иметь решений**, либо **его решением может быть любое число.**

Пример 7

Решим неравенство $5(x-2)-(x-3)>4(x-1)$.

В обеих частях неравенства раскроем скобки: $5x-10-x+3>$ $>4x-4$, приведем подобные члены: $4x-7>4x-4$. Перенесем члены неравенства, зависящие от x, в левую часть, а числа – в правую часть: $4x-4x>-4+7$. Запишем (после приведения подобных членов) неравенство в виде $0\cdot x>3$. Так как при любом значении x полученное неравенство обращается в неверное числовое неравенство $0>3$, то данное неравенство решений не имеет, т. е. $x\in\varnothing$.

Пример 8

Решим неравенство $2(x-3)+2(x+1)\geq 4(x-2)$.

Раскроем скобки в обеих частях неравенства: $2x-6+2x+2\geq$ $\geq 4x-8$ и приведем подобные члены: $4x-4\geq 4x-8$. Перенесем члены неравенства, зависящие от x, в левую часть, а числа – в правую часть: $4x-4x\geq -8+4$. После приведения подобных членов, запишем неравенство в виде $0\cdot x\geq -4$. Так как при любом значении x полученное неравенство обращается в верное числовое неравенство $0\geq -4$, то решением данного неравенства будет любое число x, т. е. $x\in(-\infty;+\infty)$.

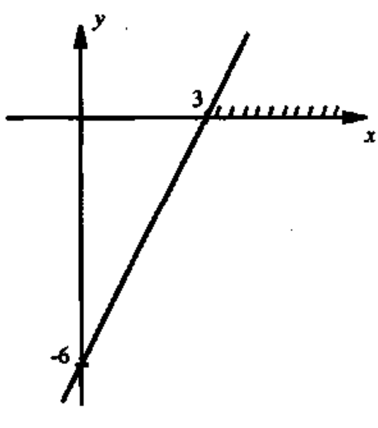
Так же, как и решение линейных уравнений, **решение линейных неравенств имеет наглядную графическую иллюстрацию.**

Пример 9

Решим графически неравенство $2x-6>0$.

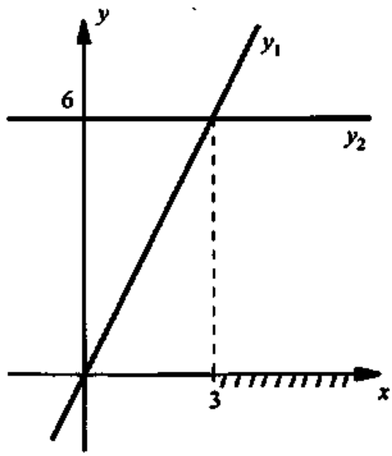
Для решения используем два подхода.

а) Рассмотрим линейную функцию $y=2x-6$ и построим ее график.



Тогда графический смысл неравенства $2x - 6 > 0$: найти те значения x, при которых значения функции $y = 2x - 6$ положительны. Так как абсцисса точки пересечения графика функции $y(x)$ с осью x равна $x = 3$ (т. е. $y = 0$ при $x = 3$), то данное неравенство выполняется при $x > 3$, т. е. его решение $x \in (3; +\infty)$.

б) Запишем данное неравенство $2x - 6 > 0$ в виде $2x > 6$. Рассмотрим две линейные функции $y_1 = 2x$ (прямая пропорциональность, ее график проходит через начало координат) и $y_2 = 6$ (график этой функции – горизонтальная прямая). Графический смысл неравенства $2x > 6$: найти те значения x, при которых значения функции y_1 больше значений функции y_2. Абсцисса точки пересечения графиков функций y_1 и y_2 равна $x = 3$. Из рисунка видно, что данное неравенство выполняется при $x > 3$, т. е. его решение $x \in (3; +\infty)$.



Разумеется, при использовании двух разных подходов, был получен один и тот же ответ. Поэтому можно применять тот подход, который более удобен для вас.

IV. Контрольные вопросы

1. Что называется решением неравенства с одной переменной?
2. Какие неравенства считаются равносильными?
3. Сформулируйте свойства равносильности неравенств.
4. Какое неравенство называется линейным неравенством с одной переменной?
5. На примере поясните графический способ решения линейных неравенств.

V. Задание на уроке

№ 33.1; 33.9 (а, б); 33.12; 33.20 (в, г); 33.25 (а, б); 33.26 (а); 33.30 (в, г); 33.32 (а); 33.34 (б); 33.35.

VI. Задание на дом

№ 33.2; 33.9 (в, г); 33.13; 33.20 (а, б); 33.25 (в, г); 33.26 (б); 33.30 (а, б); 33.32 (б); 33.34 (а); 33.36.

VII. Подведение итогов урока

§ 34. Решение квадратных неравенств

Уроки 86–88. Квадратные неравенства

Цель: рассмотреть способы решения квадратных неравенств.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. При каких значениях x двучлен $3x + 5$ больше двучлена $x - 3$?
2. Аналитически и графически решите неравенство $3x + 1 \le x - 5$.

Вариант 2

1. При каких значениях x двучлен $4x - 1$ меньше двучлена $2x - 5$?
2. Аналитически и графически решите неравенство $2x + 3 \ge -x + 6$.

III. Изучение нового материала

Понятие квадратного неравенства аналогично понятию квадратного уравнения. **Если в одной части неравенства стоит квадратный трехчлен, а в другой – число нуль, то такое неравенство называют квадратным**. Например, неравенства $3x^2 - 2x - 1 \le 0$ и $-5x^2 + 3x + 2 > 0$ являются квадратными. Вообще говоря, если в части неравенства переменная x входит в степени 2 и ниже, то после несложных преобразований такое неравенство сводится к квадратному. Итак, **квадратное неравенство имеет вид $ax^2 + bx + c \vee 0$.**

Пример 1

В неравенстве $2x^2 \geq 5x - 3$ перенесем (изменяя знак) члены $5x$ и -3 в левую часть и получим квадратное неравенство $2x^2 - 5x + 3 \geq 0$.

К квадратным неравенствам приводят многие геометрические и текстовые задачи.

Пример 2

Одну сторону квадрата увеличили на 2 см, а другую – на 6 см. Площадь получившегося прямоугольника стала больше 45 см^2. Какова была сторона квадрата?

Пусть сторона квадрата равна x см, тогда стороны прямоугольника $(x + 2)$ см и $(x + 6)$ см и его площадь равна $(x + 2)(x + 6) > 45$, или $x^2 + 8x + 12 > 45$, или $x^2 + 8x - 33 > 0$. Разложим левую часть неравенства на множители: $(x - 3)(x + 11) > 0$. Так как по условию $x > 0$, то и $x + 11 > 0$. Разделим обе части неравенства на положительное выражение $x + 11$. При этом знак неравенства сохраняется и получаем линейное неравенство $x - 3 > 0$, откуда $x > 3$. Итак, сторона квадрата больше 3 см.

Пример 3

На плацу производит построение рота солдат, состоящая не менее чем из 72 человек. Оказалось, что шеренг на 6 больше, чем солдат в каждой шеренге. Сколько может быть солдат в каждой шеренге?

Пусть число солдат в каждой шеренге равно x, тогда число шеренг равно $x + 6$ и число солдат в роте равно $x(x + 6)$. По условию задачи получаем неравенство $x(x + 6) \geq 72$ или $x^2 + 6x - 72 \geq 0$. Разложим левую часть этого квадратного неравенства на множители $(x + 12)(x - 6) \geq 0$. Так как по условию $x > 0$, то и $x + 12 > 0$. Разделим обе части неравенства на положительное выражение $x + 12$. При этом знак неравенства сохраняется, и получаем линейное неравенство $x - 6 \geq 0$, откуда $x \geq 6$.

Итак, в каждой шеренге находится не менее 6 солдат.

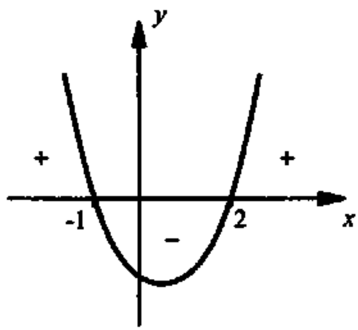
Заметим, что в двух последних примерах по условию задачи возникало дополнительное условие $x > 0$, что позволило легко свести квадратное неравенство к линейному неравенству и решить его. Теперь рассмотрим решение квадратных неравенств (без ограничений на x). Одним из распространенных способов решения квадратных неравенств является **графический способ**.

Как известно, квадратичная функция задается формулой $y = ax^2 + bx + c$ (где $a \neq 0$) и ее графиком является парабола. Поэтому графическое решение квадратного неравенства сводится к отысканию нулей квадратичной функции, построению эскиза графика этой функции и отысканию промежутков, на которых квадратичная функция принимает положительные или отрицательные значения.

Пример 4

Графически решим неравенство $x^2 - x - 2 \geq 0$.

Графиком квадратичной функции $y = x^2 - x - 2$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдем точки пересечения этой параболы с осью Ox. Для этого решим квадратное уравнение $x^2 - x - 2 = 0$. Корни этого уравнения $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$, т. е. $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$. Следовательно, парабола пересекает ось Ox в точках $x = -1$ и $x = 2$. Изобразим эскиз графика этой квадратичной функции.



Неравенству $x^2 - x - 2 \geq 0$ удовлетворяют те значения x, при которых значения функции равны нулю или положительны, т. е. те значения x, при которых точки параболы лежат на оси Ox или выше этой оси. Из рисунка видно, что такими значениями являются все числа x из промежутков $x \leq -1$ и $x \geq 2$.

График построенной функции может быть использован и при решении других неравенств, которые отличаются от данного только знаком неравенства. Из приведенного рисунка видно, что:

1) решениями неравенства $x^2 - x - 2 > 0$ являются числа из промежутков $x < -1$ и $x > 2$;

2) решениями неравенства $x^2 - x - 2 \leq 0$ являются все числа промежутка $-1 \leq x \leq 2$;

3) решениями неравенства $x^2 - x - 2 < 0$ являются все числа промежутка $-1 < x < 2$.

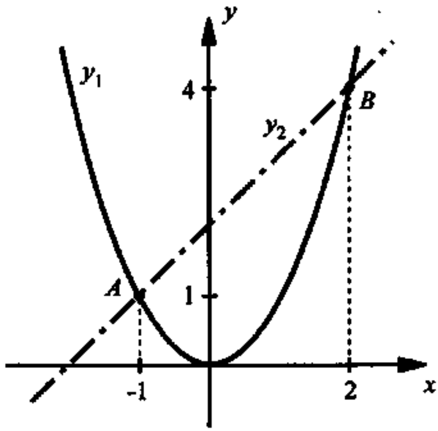
Заметим, что при решении квадратных неравенств необязательно приводить их к стандартному виду. Еще раз вернемся к предыдущему примеру и решим его несколько иначе.

Пример 5

Вновь решим неравенство $x^2 - x - 2 \geq 0$.

Представим такое неравенство в виде $x^2 \geq x + 2$. В одной и той же системе координат построим графики функций $y_1 = x^2$ (парабола) и $y_2 = x + 2$ (прямая линия). Найдем абсциссы точек пересечения этих графиков. Приравняем правые части функций и получим уравнение $x^2 = x + 2$ или $x^2 - x - 2 = 0$.

Корни этого квадратного уравнения $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$. Поэтому такие графики пересекаются в двух точках A и B, абсциссы которых, соответственно, равны $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$.



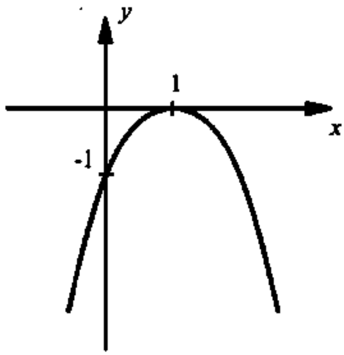
Неравенству $x^2 \geq x + 2$ или $y_1 \geq y_2$ удовлетворяют те значения x, при которых значения первой функции больше или равны значениям второй функции, т. е. при которых график первой функции расположен выше или на уровне второй функции. Из рисунка видно, что такими значениями являются все числа x из промежутков $x \leq -1$ и $x \geq 2$.

Несмотря на различие рисунков в примерах 4 и 5, получен один и тот же результат, т. е. одно и то же решение данного неравенства. Заметим, что второй способ оказывается более полезным при решении сложных неравенств (кубических неравенств, неравенств с модулями и т. д.).

Пример 6

Решим неравенство $-x^2 + 2x - 1 \geq 0$.

Запишем неравенство в виде $-(x - 1)^2 \geq 0$ и построим эскиз графика функции $y = -(x - 1)^2$.



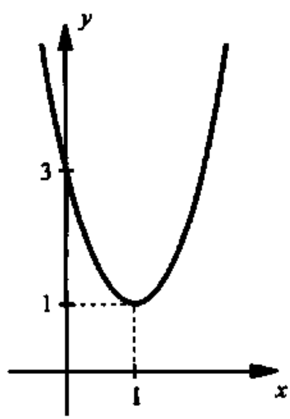
Ветви этой параболы направлены вниз. Уравнение $-(x-1)^2=0$ имеет один корень $x=1$. Поэтому парабола касается оси Ox в точке $(1; 0)$. Для решения неравенства $-(x-1)^2 \geq 0$ надо определить, при каких значениях x значения функции y неотрицательны. Из рисунка видно, что функция положительных значений не имеет. Значение $y=0$ получается только при $x=1$. Поэтому данное неравенство $-x^2+2x-1 \geq 0$ имеет единственное решение $x=1$.

Разумеется, как и в примере 1, используя построенный график, можно решить и аналогичные неравенства.

Пример 7

Решим неравенство $2x^2-4x+3>0$.

Построим эскиз графика функции $y=2x^2-4x+3$. Ветви этой параболы направлены вверх. Уравнение $2x^2-4x+3=0$ корней не имеет, поэтому парабола не пересекает ось Ox. Это означает, что значения квадратичной функции при всех x положительны, поэтому неравенство $2x^2-4x+3>0$ выполняется при всех значениях x.



Для решения квадратного неравенства с помощью графика нужно (**алгоритм решения неравенства** $ax^2+bx+c\vee 0$):

1) **определить направление ветвей** параболы по знаку старшего коэффициента квадратичной функции;

2) **найти корни** соответствующего **квадратного уравнения или** установить, что их нет;

3) **построить эскиз графика** квадратичной функции, учитывая точки пересечения (или касания) с осью Ox, если они есть;

4) **по графику определить промежутки**, на которых **функция принимает нужные значения**.

Теперь обсудим **аналитический способ** решения квадратных неравенств. При решении различных типов неравенств широко используется **метод интервалов**. Это наиболее универсальный и мощный метод решения всех неравенств (начиная от линейных и кончая тригонометрическими и логарифмическими). Так же метод эффективен и в случае неравенств, содержащих различные функции (например, многочлены и иррациональные функции). Поясним метод интервалов на примерах.

Пример 8

Выясним, при каких значениях x квадратный трехчлен $2x^2+5x-3$ принимает положительные значения, а при каких – отрицательные.

Найдем корни уравнения $2x^2+5x-3=0$ и получим $x_1=-3$ и $x_2=\frac{1}{2}$. Разложим данный многочлен на множители: $2x^2+5x-3=$ $=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)$. Нанесем точки $x_1=-3$ и $x_2=\frac{1}{2}$ на числовую ось. Эти точки разбивают ось на три интервала (промежутка): $x\le -3$, $-3<x<\frac{1}{2}$ и $x\ge\frac{1}{2}$. Теперь расставим знаки выражения $2x^2+5x-3=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)$ в каждом интервале.

На промежутке $x<-3$ оба множителя $x-\frac{1}{2}$ и $x+3$ отрицательны, их произведение положительно. Поэтому выражение $2x^2+5x-3$

положительно (поставлен знак +). В точке $x = -3$ множитель $x + 3$ равен 0 и выражение $2x^2 + 5x - 3 = 0$. В интервале $-3 < x < \frac{1}{2}$ множитель $x + 3$ меняет знак и $x + 3 > 0$. Поэтому произведение $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3) < 0$ и выражение $2x^2 + 5x - 3$ отрицательно (поставлен знак −). В точке $x = \frac{1}{2}$ множитель $x - \frac{1}{2}$ равен 0 и выражение $2x^2 + 5x - 3 = 0$. В промежутке $x > \frac{1}{2}$ множитель $x - \frac{1}{2}$ меняет знак и $x - \frac{1}{2} > 0$. Поэтому произведение $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3) > 0$ и выражение $2x^2 + 5x - 3$ положительно (поставлен знак +).

Таким образом, выражение $2x^2 + 5x - 3$ положительно при $x < -3$ и $x > \frac{1}{2}$ и отрицательно при $-3 < x < \frac{1}{2}$.

Теперь предварительно сформулируем **алгоритм решения задачи об определении знака квадратного трехчлена:**

1) **находим корни** квадратного трехчлена;

2) **отмечаем** эти **корни на числовой оси;**

3) **определяем знак** квадратного **трехчлена в любом интервале;**

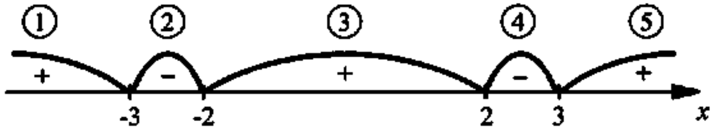
4) **расставляем знаки** на остальных **интервалах в порядке чередования.**

Таким же способом можно решать неравенства, содержащие многочлены более высокого порядка.

Пример 9

Решим неравенство $x^4 - 13x^2 + 36 \geq 0$.

Найдем корни многочлена четвертой степени $x^4 - 13x^2 + 36$. Для этого решим биквадратное уравнение $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$. Введем новую переменную $t = x^2$ и получим квадратное уравнение $t^2 - 13t + 36 = 0$. Корни этого уравнения $t_1 = 4$ и $t_2 = 9$. Вернемся к старой переменной и получим неполные квадратные уравнения $x^2 = 4$ (корни $x_{1,2} = \pm 2$) и $x^2 = 9$ (корни $x_{3,4} = \pm 3$). Отметим эти корни на числовой оси.



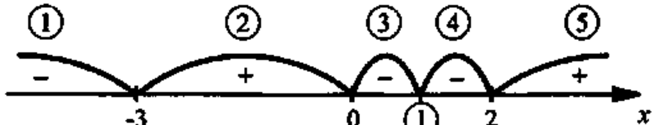
Они разбивают ось на пять интервалов. Определим знак многочлена $x^4 - 13x^2 + 36$ в любом промежутке, например, в третьем. Подставим любую точку этого промежутка (не совпадающую с его концами), например, $x = 1$ в выражение $x^4 - 13x^2 + 36$ и получим $1 - 13 + 36 = 24 > 0$. Таким образом, в точках третьего интервала выражение $x^4 - 13x^2 + 36$ положительно. Расставляем знаки на остальных интервалах в порядке чередования. Выписываем те промежутки, на которых стоит знак «+», и получаем решение неравенства $x^4 - 13x^2 + 36 \geq 0$: $x \leq -3$, $-2 \leq x \leq 2$ и $x \geq 3$.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда многочлен имеет **несколько одинаковых корней.**

Пример 10

Решим неравенство $(x-1)^2 x(x+3)^3(x-2) \geq 0$.

Найдем корни данного многочлена. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем уравнения $(x - 1)^2 = (x - 1)(x - 1) = 0$ (корни $x_1 = x_2 = 1$), $x = 0$ (корень $x_3 = 0$), $(x + 3)^3 = (x + 3)(x + 3)(x + 3) = 0$ (корни $x_4 = x_5 = x_6 = -3$), $x - 2 = 0$ (корень $x_7 = 2$). Отметим эти корни на числовой оси.



Они разбивают ось на пять промежутков. Теперь расставим знаки данного выражения в этих интервалах. При этом обратим внимание на **особенности изменения знака** выражения, **связанные с несколькими одинаковыми корнями.**

Если корень встречается четное количество раз (говорят еще, что корень имеет **четную кратность), то при проходе через такой корень знак выражения не меняется.** В данном примере корень второй (четной) кратности $x = 1$. Очевидно, что выражение $(x-1)^2 \geq 0$ при всех x. Поэтому данное выражение $(x - 1)^2x(x + 3)^3(x - 2)$ при $x = 1$ обращается в нуль, но знака при этом не меняет. Тогда в интервалах 3 и 4 выражение имеет одинаковый знак. Так как по сравнению с примерами 1, 2 в точке $x = 1$ проявляются особенности в изменении знака, то обведем эту точку на числовой оси.

Если корень встречается нечетное количество раз (корень **нечетной кратности), то при проходе через такой корень знак выражения меняется на противоположный.** В данном примере корень третьей (нечетной) кратности $x = -3$. Очевидно, что выражение $(x + 3)^3$ слева и справа от точки $x = -3$ имеет противоположные знаки. Поэтому выражение $(x-1)^2x(x+3)^3(x-2)$ при проходе через точку $x=-3$ меняет знак. Очевидно, что корни $x=0$ и $x=2$ также нечетной (первой) кратности. Следовательно, все вышеизложенное относится и к этим корням.

Определим знак выражения $(x-1)^2x(x+3)^3(x-2)$, например, при $x=6$ (пятый интервал) и получим, что оно положительно. Расставим знаки в остальных промежутках, учитывая, что при переходе от четвертого к третьему интервалу знак выражения не меняется. Теперь можно записать решение данного неравенства: $-3 \le x \le 0$, $x=1$, $x \ge 2$.

IV. Контрольные вопросы

1. Запишите квадратное неравенство в общем виде.
2. Алгоритм решения квадратного неравенства графическим способом.
3. Метод интервалов при решении квадратных неравенств.

V. Задание на уроке

№ 34.1 (а, б); 34.5 (в, г); 34.7 (а, б); 34.17 (в, г); 34.23 (а, б); 34.33 (а, б); 34.35 (а); 34.36; 34.41 (а, б); 34.42; 34.44.

VI. Задание на дом

№ 34.1 (в, г); 34.5 (а, б); 34.7 (в, г); 34.17 (а, б); 34.23 (в, г); 34.33 (в, г); 34.35 (б); 34.37; 34.41 (в, г); 34.43; 34.45.

VII. Подведение итогов урока

Уроки 89–90. Решение сложных неравенств (факультативное занятие)

***Цель*:** рассмотреть решение более сложных неравенств.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (тест).

Вариант 1

1. Решите неравенство $(x-3)(2+x) \ge 0$.

Ответы: а) $x \le 3$; б) $x \ge -2$; в) $x \le -2$ и $x \ge 3$; г) $-2 \le x \le 3$.

2. Решите неравенство $2x^2 - 3x + 1 \le 0$.
   Ответы: а) $x \ge 1$; б) $0{,}5 \le x \le 1$; в) $x \le 0{,}5$; г) $x \le 0{,}5$ и $x \ge 1$.
3. Решите неравенство $|3x - 4| > 1$.
   Ответы: а) $x < 1$ и $x > \frac{5}{3}$; б) $1 < x < \frac{5}{3}$; в) $x > 1$; г) $x < \frac{5}{3}$.

Вариант 2

1. Решите неравенство $(x + 3)(2 - x) \ge 0$.
   Ответы: а) $x \ge -3$; б) $-3 \le x \le 2$; в) $x \le 2$; г) $x \le -3$ и $x \ge 2$.
2. Решите неравенство $3x^2 - 5x + 2 \le 0$.
   Ответы: а) $\frac{2}{3} \le x \le 1$; б) $x \le \frac{2}{3}$ и $x \ge 1$; в) $x \ge \frac{2}{3}$; г) $x \ge 1$.
3. Решите неравенство $|2x - 3| > 1$.
   Ответы: а) $x > 1$; б) $x > 2$ в) $1 < x < 2$; г) $x < 1$ и $x > 2$.

III. Изучение нового материала

Использованные в §§ 33–34 подходы могут быть применены и для решения более сложных задач. Такая сложность, как правило, связана с наличием в них **модулей** или **параметров**. Начнем рассмотрение с линейных неравенств.

Пример 1

Решим неравенство $|x - 1| < 3$.

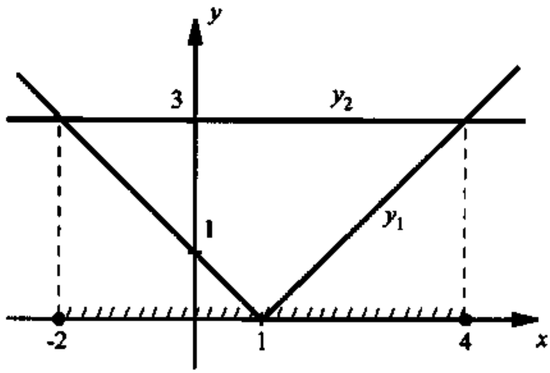
Сначала решим это неравенство аналитически, рассмотрев два случая:

а) **Если $x - 1 \ge 0$** (т. е. $x \ge 1$), то $|x - 1| = x - 1$ и неравенство имеет вид $x - 1 < 3$. Решение этого неравенства $x < 4$. Учитывая условие $x \ge 1$, получаем в этом случае решение $1 \le x < 4$ или $x \in [1; 4)$.

б) **Если $x - 1 < 0$** (т. е. $x < 1$), то $|x - 1| = -(x - 1) = 1 - x$ и неравенство имеет вид $1 - x < 3$. Решение этого неравенства $-2 < x$. Учитывая условие $x < 1$, получаем в этом случае решение $-2 < x < 1$ или $x \in (-2; 1)$.

Находим объединение полученных решений $[1; 4)$ и $(-2; 1)$ и получаем окончательный ответ: $x \in (-2; 4)$.

Теперь решим неравенство $|x - 1| < 3$ графически. Построим графики функций $y_1 = |x - 1|$ (он получается смещением графика функции $y = |x|$ на одну единицу вправо) и $y_2 = 3$ (горизонтальная прямая). Неравенство $|x - 1| < 3$ означает, что надо найти такие значения x, при которых значения функции y_1 меньше значений функции y_2 (или график функции y_1 лежит ниже графика функции y_2). Из рисунка видно, что такие x лежат в промежутке $(-2; 4)$.

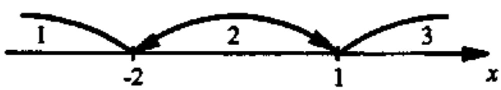


Пример 2

Решим неравенство $|x-1|-|x-2|\le -2$.

Решим такое неравенство аналитически, раскрывая знаки модулей методом интервалов. Выражение $x-1$ меняет знак при $x=1$, выражение $x+2$ – при $x=-2$.

Нанеся эти значения x на числовую ось, получаем три числовых промежутка (интервала).



1) Если $x\in(-\infty;-2]$, то $x-1<0$ и $|x-1|=-(x-1)=1-x$; $x+2\le 0$ и $|x+2|=-(x+2)=-x-2$. Тогда данное неравенство имеет вид $1-x-(-x-2)\le -2$ или $3\le -2$. Так как получили неверное неравенство, то ни одна точка рассматриваемого промежутка $(-\infty;-2]$ не удовлетворяет данному неравенству.

2) Если $x\in(-2;1)$, то $x-1<0$ и $|x-1|=-(x-1)=1-x$; $x+2>0$ и $|x+2|=x+2$. Тогда данное неравенство имеет вид $1-x-(x+2)\le -2$ или $-2x-1\le -2$. Решение этого неравенства $x\ge\frac{1}{2}$. С учетом рассматриваемого промежутка $(-2;1)$ получаем решение $x\left[\frac{1}{2};1\right)$.

3) Если $x\in[1;+\infty)$, то $x-1\ge 0$ и $|x-1|=x-1$; $x+2>0$ и $|x+2|=x+2$. Тогда данное неравенство имеет вид $x-1-(x+2)\le -2$ или $-3\le -2$. Так как получили верное неравенство, то все точки рассматриваемого промежутка $x\in[1;+\infty)$ являются решениями данного неравенства.

Находим объединение полученных решений $\left[\frac{1}{2};1\right)$ и $[1;+\infty)$ и получаем окончательный ответ: $x \in \left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Пример 3

Решим неравенство $(a-1)x \le a^2 - 1$.

Для нахождения решения неравенства необходимо обе его части разделить на выражение $a - 1$, зависящее от параметра a. Однако это выражение при различных значениях a будет иметь разный знак. Поэтому надо рассмотреть три случая.

а) **Если $a - 1 < 0$ (т. е. $a < 1$).**

Тогда при делении обеих частей данного неравенства $(a-1)x \le a^2 - 1$ на отрицательное выражение $a - 1$ знак неравенства меняется на противоположный и находим, что $x \ge \frac{a^2-1}{a-1}$, или $x \ge a + 1$, или $x \in [a+1;+\infty)$.

Итак, в этом случае получаем: при $a \in (-\infty;1)$ $x \in [a+1;+\infty)$.

б) **Если $a - 1 = 0$ (т. е. $a = 1$).**

В этом случае коэффициент при x равен 0. Поэтому делить обе части данного неравенства на выражение $a - 1$ нельзя (еще раз подчеркнем, что в этом случае такое выражение равно нулю). Тогда подставим значение $a = 1$ в данное неравенство $(a-1)x \le a^2 - 1$ и получим $0 \cdot x \le 0$. При любом значении x из этого неравенства имеем верное числовое неравенство $0 \le 0$. Следовательно, в этом случае решением данного неравенства является любое число x. Итак, при $a = 1$ $x \in (-\infty;+\infty)$.

в) **Если $a - 1 > 0$ (т. е. $a > 1$).**

Тогда при делении обеих частей данного неравенства $(a-1)x \le a^2 - 1$ на положительное выражение $a - 1$ знак неравенства сохраняется и находим, что $x \le \frac{a^2-1}{a-1}$, или $x \le a + 1$, или $x \in (-\infty;a+1]$. Итак, в этом случае получили: при $a \in (1;+\infty)$ $x \in (-\infty;a+1]$.

Так как в задачах с параметрами очень важна запись ответа (ответ записывается в порядке возрастания параметра), то приведем полный ответ:

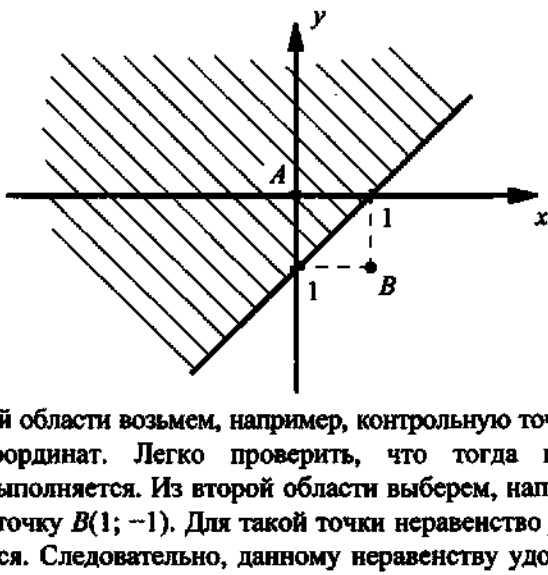
при $a \in (-\infty; 1)$ $x \in [a+1; +\infty)$; при $a = 1$ $x \in (-\infty; +\infty)$; при $a \in (1; +\infty)$ $x \in (-\infty; a+1]$.

Теперь рассмотрим **линейные неравенства с двумя переменными.** Как правило, **подобные задачи сводятся к изображению множества точек, координаты которых удовлетворяют неравенству, на координатной плоскости.**

Пример 4

На координатной плоскости изобразим множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $y - 2 \geq x - 3$.

Запишем данное неравенство в виде $y \geq x - 1$. Сначала построим график линейной функции $y = x - 1$ (прямая линия). Эта линия разделяет все точки координатной плоскости на точки, расположенные над этой прямой, и точки, расположенные под этой прямой. Проверим, какие точки удовлетворяют данному неравенству.

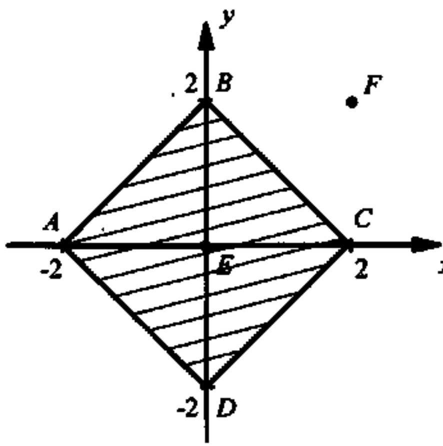


Из первой области возьмем, например, контрольную точку $A(0; 0)$ – начало координат. Легко проверить, что тогда неравенство $y \geq x - 1$ выполняется. Из второй области выберем, например, контрольную точку $B(1; -1)$. Для такой точки неравенство $y \geq x - 1$ не выполняется. Следовательно, данному неравенству удовлетворяют точки, расположенные выше и на прямой $y = x - 1$ (т. е. точки, аналогичные точке A). Эти точки заштрихованы.

Пример 5

На координатной плоскости изобразим множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $|x| + |y| \leq 2$.

Сначала запишем неравенство в виде $|y| \leq 2 - |x|$. Надо построить график уравнения $|y| = 2 - |x|$. Раскроем $|y|$, рассмотрев два случая. При $y \geq 0$ строим график функции $y = 2 - |x|$. Этот график получается смещением графика $y = -|x|$ на две единицы вверх. При этом надо учесть ограничение $y \geq 0$. Получаем ломаную линию ABC. При $y < 0$ получаем $-y = 2 - |x|$ или $y = |x| - 2$.



Строим график функции $y = |x| - 2$. Он получается смещением графика $y = |x|$ на две единицы вниз. Необходимо учесть ограничение $y < 0$. Получаем ломаную CDA. Таким образом, графиком уравнения $|x| + |y| = 2$ является квадрат $ABCD$. Этот квадрат делит все точки плоскости на те, которые расположены внутри квадрата, и те, которые расположены вне квадрата. Из первой области возьмем точку $E(0; 0)$ и убедимся, что для нее выполняется данное неравенство $|x| + |y| \leq 2$. Действительно, $|0| + |0| \leq 2$ или $0 \leq 2$ – верное неравенство. Из второй области возьмем контрольную точку $F(2; 2)$. Видим, что для нее данное неравенство не выполняется: $|2| + |2| \leq 2$ или $4 \leq 2$ – неверное неравенство. Следовательно, данному неравенству удовлетворяют точки, расположенные внутри и на границе квадрата (т. е. точки аналогичные точке E). Эти точки заштрихованы.

Разумеется, к неравенствам с параметрами приводят и более сложные задачи.

Пример 6

При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 + x - 1 = 0$ не имеет решений?

Так как старший коэффициент уравнения зависит от параметра a, то необходимо рассмотреть два случая.

а) **Если $a \neq 0$**, то уравнение $ax^2 + x - 1 = 0$ является **квадратным**. Такое уравнение не имеет решений, если его дискриминант

$D = 1 + 4a < 0$. Решение этого неравенства $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right)$. Заметим, что в указанный промежуток значение $a = 0$ не входит.

б) Если $a = 0$, то данное уравнение $ax^2 + x - 1 = 0$ является линейным и имеет вид $x - 1 = 0$. Очевидно, что это уравнение имеет единственное решение $x = 1$.

Итак, при $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right)$ данное уравнение решений не имеет.

Пример 7

При каких значениях параметра a оба корня уравнения $x^2 + (a-4)x + 3 - 3a = 0$ меньше 5?

Прежде всего решим данное квадратное уравнение. Найдем его дискриминант $D = (a - 4)^2 - 4(3 - 3a) = a^2 - 8a + 16 - 12 + 12a = = a^2 + 4a + 4 = (a + 2)^2$ и корни $x_{1,2} = \frac{-(a-4) \pm (a+2)}{2}$, т. е. $x_1 = 3$ и $x_2 = 1 - a$. Очевидно, что корень x_1 уже удовлетворяет условию $x_1 < 5$. Второй корень x_2 должен также удовлетворять аналогичному неравенству. Получаем неравенство $1 - a < 5$, решение которого $a > -4$, т. е. $a \in (-4; +\infty)$.

Теперь необходимо добиться, чтобы данное уравнение имело два корня (имеется в виду два различных корня). Получаем условие $3 \neq 1 - a$, откуда $a \neq -2$.

Учитывая выше написанное, имеем: при $a \in (-4; -2) \cup (-2; +\infty)$ оба корня данного уравнения меньше 5.

Пример 8

Решим неравенство $|x + 1| + x^2 + 2x + 1 \leq 0$.

Запишем неравенство в виде $|x + 1| + (x + 1)^2 \leq 0$ и введем новую переменную $t = x + 1$. Тогда неравенство принимает вид $|t| + t^2 \leq 0$. Так как $|t| \geq 0$ и $t^2 \geq 0$ при всех значениях t, то сумма $|t| + t^2 \geq 0$ при всех t. Поэтому неравенство $|t| + t^2 \leq 0$ имеет единственное решение $t = 0$. Теперь вернемся к старой неизвестной x. Получаем линейное уравнение $x + 1 = 0$, решение которого $x = -1$. Итак, решение данного неравенства $x = -1$.

Подобного типа неравенства существуют и с двумя переменными.

Пример 9

Решим неравенство $(x - 2y + 1)^2 + |3x + y - 2| \leq 0$.

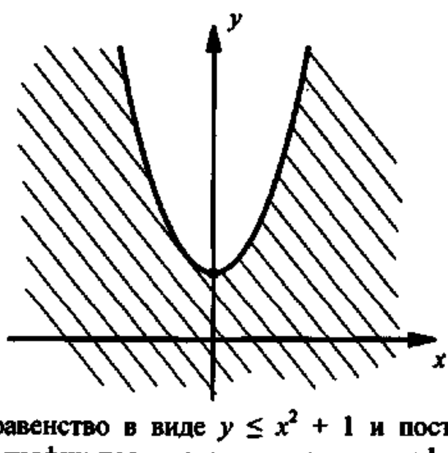
Аналогично предыдущем примеру при всех значениях x и y выражения $(x-2y+1)^2 \geq 0$ и $|3x+y-2| \geq 0$. Поэтому сумма $(x-2y+1)^2+|3x+y-2| \geq 0$. Следовательно, данное неравенство выполняется только при тех значениях x и y, которые являются решением линейной системы уравнений $\begin{cases} x-2y+1=0, \\ 3x+y-2=0. \end{cases}$ Решим эту систему, например, способом подстановки. Из второго уравнения выразим $y = 2 - 3x$ и подставим в первое уравнение. Получаем: $x - 2(2 - 3x) + 1 = 0$, или $x - 4 + 6x + 1 = 0$, или $7x = 3$, откуда $x = \frac{3}{7}$. Используя равенство $y = 2 - 3x$, найдем $y = 2 - 3 \cdot \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$.

Итак, данное неравенство имеет единственное решение $x = \frac{3}{7}$, $y = \frac{5}{7}$.

Достаточно часто на координатной плоскости приходится **изображать множество точек, удовлетворяющих нелинейному неравенству.**

Пример 10

На координатной плоскости изобразим множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $y - 1 \leq x^2$.



Запишем неравенство в виде $y \leq x^2 + 1$ и построим параболу $y = x^2 + 1$ (этот график получается смещением графика $y = x^2$ на одну единицу вверх). Парабола разбивает точки плоскости на точки, расположенные над параболой, и точки, расположенные под параболой. Взяв в качестве контрольной точки начало координат (аналогично примеру 5), получаем верное неравенство $0 \le 1$. Поэтому данному неравенству удовлетворяют точки, расположенные ниже параболы и на параболе. Эти точки заштрихованы.

IV. Задание на уроке и дома

1. Аналитически решите неравенство:

а) $2x(4x-2)-4(2x^2+3x-7(x-2)) \ge 8-20x$;

б) $7x(x-1)-(x(7x+2)-5(x+3)) \le 12-3x$;

в) $3x(2x+1)-x^2-\left(5x(x-3)+\dfrac{3x-5}{5}\right)<18+4x$;

г) $5x^2-(x+1)(x+3)-\left(4x(x-2)+\dfrac{4x-2}{7}\right)<2x+3$.

Ответы: а) $x \in [2; +\infty)$; б) $x \in [3; +\infty)$; в) $x \in (-\infty; 5)$; г) $x \in (-\infty; 4)$.

2. При всех значениях параметра a решите неравенство:

а) $(a+3)x \ge a^2-9$;

б) $(2-a)x \ge a^2-4$;

в) $1-x<a(a-x)$;

г) $2(x+2)>a(a-x)$;

д) $(a-1)^2x \le a^2-1$;

г) $(a+2)^2x \ge a^2-4$.

Ответы: а) при $a \in (-\infty; -3)$ $x \in (-\infty; a-3]$, при $a=-3$ $x \in (-\infty; +\infty)$, при $a \in (-3; +\infty)$ $x \in [a-3; +\infty)$; б) при $a \in (-\infty; 2)$ $x \in [-a-2; +\infty)$, при $a=2$ $x \in (-\infty; +\infty)$, при $a \in (2; +\infty)$ $x \in (-\infty; -a-2]$; в) при $a \in (-\infty; 1)$ $x \in (a+1; +\infty)$, при $a=1$ $x \in \varnothing$, при $a \in (1; +\infty)$ $x \in (-\infty; a+1)$; г) при $a \in (-\infty; -2)$ $x \in (-\infty; a-2)$, при $a=-2$ $x \in \varnothing$, при $a \in (-2; +\infty)$ $x \in [a-2; +\infty)$ (указание: примеры в, г привести к виду, аналогичному примерам а, б); д) при $a \ne 1$ $x \in \left(-\infty; \dfrac{a+1}{a-1}\right]$, при $a=1$ $x \in (-\infty; +\infty)$; е) при $a \ne -2$ $x \in \left[\dfrac{a-2}{a+2}; +\infty\right)$, при $a=-2$ $x \in (-\infty; +\infty)$.

3. При каких значениях параметра a уравнение

а) $3x^2-2x+a=0$ не имеет корней;

б) $2x^2-3x+5a=0$ имеет два различных корня;

в) $x^2-(a+4)x+3a+3=0$ имеет один корень, больший 6;

г) $x^2-2ax+2a-1=0$ имеет один отрицательный корень;

д) $ax^2-3x+2=0$ имеет хотя бы один корень;

е) $3ax^2-4x+1=0$ имеет два различных корня;

ж) $2x^2-(a+2)x+3a-12=0$ имеет хотя бы один отрицательный корень;

з) $3x^2-(a+3)x+2a-6=0$ имеет хотя бы один положительный корень?

Ответы: а) $a\in\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$; б) $a\in\left(-\infty;-\frac{9}{40}\right)$; в) $a\in(5;+\infty)$; г) $a\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$; д) $a\in\left(-\infty;\frac{9}{8}\right)$; е) $a\in(-\infty;0)\cup\left(0;\frac{4}{3}\right)$; ж) $a\in(-\infty;4)$; з) $a\in(-\infty;+\infty)$.

4. Решите неравенства:

а) $3|x-2|+x^2-4x+4\le 0$;

б) $2|x+3|+3x^2+18x+27\le 0$;

в) $2(x-y+1)^2+3|2x+y+2|\le 0$;

г) $3|2x-y+3|+5(3x+2y+1)^2\le 0$;

д) $x^2+y^2-6x+2y+10\le 0$;

е) $4x^2+y^2-4x+4y+5\le 0$.

Ответы: а) $x=2$; б) $x=-3$; в) $x=-1$, $y=0$; г) $x=-1$, $y=1$; д) $x=3$, $y=-1$; е) $x=\frac{1}{2}$, $y=-2$ (указание: в примерах д, е выделите полные квадраты суммы и разности величин).

5. На координатной плоскости изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $2x-3y\ge 1$;
б) $3x+2y\le 4$;
в) $y-x^2\ge 1$;
г) $y+x^2\le 2$;
д) $y>(x-1)^2+2$;
е) $y<2-(x+1)^2$;
ж) $y\ge x^2+2x$;
з) $y\le -x^2+4x$;
и) $y\ge |x|-2$;

к) $y < |x-2|$;
л) $(x-2)^2 + (y+3)^2 \le 1$;
м) $(x+1)^2 + (y-2)^2 \ge 4$.

Указание. Уравнение окружности с центром в точке $A(a; b)$ и радиуса R имеет вид $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

6. Решите аналитически (а если возможно, то и графически) неравенства:
а) $|x-2| \le 1$;
б) $|x+3| > 2$;
в) $|x-1| \ge x-1$;
г) $|x+1| \le -x-1$;
д) $|x+3| > 1-2x$;
е) $|x-1| < 2-3x$;
ж) $|x-3| + |x+2| \le 7$;
з) $|x-1| - |x+3| > 2$.

Ответы: а) $x \in [1; 3]$; б) $x \in (-\infty; -5) \cup (-1; +\infty)$; в) $x \in [1; +\infty)$; г) $x \in (-\infty; -1]$; д) $x \in \left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$; е) $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$; ж) $x \in [-3; 4]$; з) $x \in (-\infty; -2)$.

V. Подведение итогов урока

Уроки 91–92. Решение систем неравенств с одной переменной (факультативное занятие)

Цель: рассмотреть решение систем неравенств и двойных неравенств с одной переменной.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Аналитически решите неравенство $a(x-1) \le 2(x-1)$.

2. Аналитически и графически решите неравенство $|x+2| - 2x - 6 \ge 0$.

Вариант 2

1. Аналитически решите неравенство $a(x-1) \geq 3(x-1)$.

2. Аналитически и графически решите неравенство $|x-1| - 3x - 6 \leq 0$.

III. Изучение нового материала

Во многих случаях приходится иметь дело не с одним неравенством, а с **системой неравенств с одной переменной. Решением** системы неравенств с одной переменной называется **значение переменной, при котором выполняется каждое неравенство системы. Решить систему неравенств** означает **найти все ее решения или доказать, что решений нет.**

Пример 1

Рассмотрим систему неравенств $\begin{cases} x^2 \geq 4, \\ 3x-5>0. \end{cases}$

Число $x = 3$ является решением такой системы, т. к. при подстановке такого значения в неравенства системы получаем верные числовые неравенства (т. е. неравенства системы выполняются): $\begin{cases} 3^2 \geq 4, \\ 3\cdot 3-5>0. \end{cases}$ Число $x = -3$ не является решением системы, т. к. при подстановке в систему такого значения первое неравенство выполняется, а второе – нет: $\begin{cases} (-3)^2 \geq 4, \\ 3\cdot(-3)-5>0. \end{cases}$

Пример 2

Рассмотрим систему неравенств $\begin{cases} 2x-3 \geq 0, \\ |x-3|+|x|<2. \end{cases}$

Такая система решений не имеет, т. к. не имеет решений второе неравенство (в этом легко убедиться, построив график левой части этого неравенства).

Для решения системы неравенств необходимо:

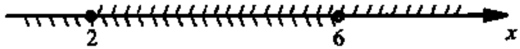
1) **решить каждое неравенство** в отдельности, т. е. **найти множество решений такого неравенства;**

2) **найти пересечение этих множеств,** которое и **будет решением системы неравенств.**

Пример 3

Решим систему неравенств $\begin{cases} 3x-5 \geq 1, \\ 2x-1<11. \end{cases}$

Будем параллельно решать каждое из неравенств системы. Получаем: $\begin{cases}3x \ge 1+5,\\ 2x < 11+1\end{cases}$ или $\begin{cases}3x \ge 6,\\ 2x < 12,\end{cases}$ откуда $\begin{cases}x \ge 2,\\ x < 6.\end{cases}$ На координатной оси изобразим решения первого (вверху) и второго (внизу) неравенств.



Из рисунка видно, что пересечением множества решений неравенств является промежуток [2; 6), т. е. оба неравенства системы выполняются на этом промежутке. Поэтому промежуток [2; 6) является решением данной системы неравенств.

Заметим, что далеко **не всегда необходимо решать все неравенства системы**. В ряде случаев достаточно **решить самое простое неравенство и проверить выполнение других неравенств системы для найденного решения**.

Пример 4

Решим систему неравенств $\begin{cases}x^2 - 2x \ge 0,\\ x^3 + 3x^2 + 5x + 1 > 0,\\ 2x - 4 \ge 0.\end{cases}$

Заметим, что первое неравенство имеет вторую степень (квадратное неравенство), второе неравенство – третью степень (кубическое неравенство), третье неравенство – первую степень (линейное неравенство). Решение кубических неравенств в 8-м классе не изучается. Поэтому решим последнее линейное неравенство и запишем первое неравенство в другом виде. Получаем: $\begin{cases}x^2 - 2x \ge 0,\\ x^3 + 3x^2 + 5x + 1 > 0,\\ 2x - 4 \ge 0\end{cases}$

или $\begin{cases}x(x-2) \ge 0,\\ x^3 + 3x^2 + 5x + 1 > 0,\\ x \ge 2.\end{cases}$

Решение третьего неравенства – промежуток [2; +∞). Очевидно, что первое неравенство для таких x выполняется, т. к. в левой части оба множителя неотрицательны (т. е. $x \ge 2$ и $x - 2 \ge 0$) и их произведение также неотрицательно.

Второе неравенство при $x \ge 2$ тоже выполняется, т. к. левая часть его содержит только положительные слагаемые (т. е. $x^3 > 0$, $3x^2 > 0$,

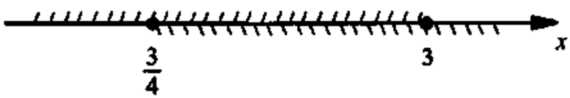
$5x > 0$) и их сумма также положительна. Таким образом, решение данной системы неравенств – промежуток $[2; +\infty)$.

Часто к решению систем неравенств приводят **двойные неравенства** (далее в этом уроке будут рассмотрены только линейные неравенства).

Пример 5

Решим двойное неравенство $3x - 5 \le x + 1 < 5x - 2$.

Заменим данное неравенство равносильной системой линейных неравенств $\begin{cases} 3x - 5 \le x + 1, \\ x + 1 < 5x - 2 \end{cases}$ и решим ее. Имеем: $\begin{cases} 2x \le 6, \\ 3 < 4x, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x \le 3, \\ \dfrac{3}{4} < x. \end{cases}$



На числовой оси изобразим решения этих неравенств и найдем пересечение множеств этих решений – промежуток $\left(\dfrac{3}{4}; 3\right]$. Следовательно, решение данного двойного неравенства – промежуток $\left(\dfrac{3}{4}; 3\right]$.

Заметим, что если **крайние части** двойного неравенства **являются числами**, то такое неравенство **можно решать и проще** (без сведения к системе неравенств). При этом используются **свойства равносильности неравенств.**

Пример 6

Решим двойное неравенство $-3 \le 1 - 4x < 9$.

По свойству равносильности из всех частей неравенства вычтем число 1. Получаем равносильное неравенство $-3 - 1 \le 1 - 4x - 1 < 9 - 1$ или $-4 \le -4x < 8$. Разделим все части неравенства на отрицательное число -4 (при этом знаки неравенства меняются на противоположные) и получаем равносильное неравенство $\dfrac{-4}{-4} \ge \dfrac{-4x}{-4} > \dfrac{8}{-4}$ или $1 \ge x > -2$. Этот промежуток $(-2; 1]$ является решением данного двойного неравенства. Для подобных примеров запись удобно вести следующим образом: $-3 \le 1 - 4x < 9$, $-4 \le -4x < 8$, $1 \ge x > -2$.

К системам неравенств очень часто приводят **текстовые задачи.**

Пример 7

Катер движется по реке, скорость которой 3 км/ч. Расстояние между пристанями составляет 100 км. При движении по течению реки катер проходит это расстояние менее чем за 4 ч, а при движении против течения – более чем за 5 ч. Какова собственная скорость катера?

Пусть собственная скорость катера x км/ч, тогда скорость его по течению реки $(x + 3)$ км/ч, против течения реки $(x - 3)$ км/ч. По течению реки за 4 ч катер пройдет расстояние $4(x + 3)$ км, и это расстояние будет более 100 км. Получаем неравенство $4(x + 3) > 100$. Против течения реки за 5 ч катер пройдет расстояние $5(x - 3)$ км, и это расстояние будет менее 100 км. Имеем неравенство $5(x - 3) < 100$.

Для нахождения собственной скорости катера получили систему линейных неравенств $\begin{cases} 4(x+3) > 100, \\ 5(-3) < 100. \end{cases}$ Используя свойства равносильности неравенств, решим ее. Имеем: $\begin{cases} x+3 > 25, \\ x-3 < 20, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x > 22, \\ x < 23. \end{cases}$ Поэтому решение этой системы неравенств $22 < x < 23$.

Таким образом, собственная скорость катера более 22 км/ч и менее 23 км/ч.

IV. Контрольные вопросы

1. Что называется решением системы неравенств с одной переменной?
2. Что означает решить систему неравенств?

V. Задание на уроке и дома

1. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2x-1 < 1{,}4-x, \\ 3x-2 \ge x-4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 17x-2 \ge 12x-1, \\ 3-9x < 1-x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} - \dfrac{x-3}{3} < 2, \\ \dfrac{13x-1}{2} \ge 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dfrac{5x+8}{3} - x \ge 2x, \\ 1 - \dfrac{6-15x}{4} \ge x. \end{cases}$

Ответы: а) $[-1; 0{,}8)$; б) $\left[\dfrac{1}{5}; \dfrac{1}{4}\right)$; в) $\left[\dfrac{1}{3}; 9\right)$; г) $\left[\dfrac{2}{11}; 2\right]$.

2. Решите двойное неравенство:

а) $-3 \le \dfrac{5x+2}{2} < 1$;

б) $-2 < \dfrac{4x+3}{3} \le 1$;

в) $-5 \le \dfrac{3x-1}{2} < 3$;

г) $-4 < \dfrac{2x-5}{3} \le 2$.

Ответы: а) $[-1{,}6; 0)$; б) $\left(-\dfrac{9}{4}; 0\right]$; в) $\left[-3; \dfrac{7}{3}\right)$; г) $\left(-\dfrac{7}{2}; \dfrac{11}{2}\right]$.

3. Решите двойное неравенство:

а) $\dfrac{2x+1}{3} < x+2 < \dfrac{5x+18}{4}$;

б) $\dfrac{3x+1}{2} < x+1 < \dfrac{5x+4}{3}$;

в) $x+3 < \dfrac{7x+3}{2} \le 3x+4$;

г) $2x+1 \le \dfrac{3x+1}{4} < 3x+7$.

Ответы: а) $(-5; +\infty)$; б) $\left(-\dfrac{1}{2}; 2\right)$; в) $\left(\dfrac{3}{5}; 5\right]$; г) $\left(-3; -\dfrac{3}{5}\right]$.

VI. Подведение итогов урока

§ 35. Приближенные значения действительных чисел

Урок 93. Запись приближенных значений

Цель: рассмотреть запись приближенных значений и оценки абсолютной погрешности.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (тест).

Вариант 1

1. Решите систему неравенств $\begin{cases} 3(2-x)+3<2(x+1)-1, \\ 2(3+x)-5>4(x-2)+1. \end{cases}$

Ответы: а) (1,6; 4); б) (−∞; 1,6); в) (4; +∞).

2. Решите двойное неравенство $-2<\frac{5x-3}{4}\le 3$.

Ответы: а) (−∞; 1]; б) [3; +∞); в) (−1; 3].

3. Найдите допустимые значения переменной для выражения $\sqrt{5-3x}+\frac{x-2}{\sqrt{2x-1}}$.

Ответы: а) $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$; б) $\left(\frac{1}{2};\frac{5}{3}\right]$; в) $x\ne\frac{1}{2}$.

Вариант 2

1. Решите систему неравенств $\begin{cases} 4(3-x)+5<3(x+2)-7, \\ 3(2+x)-4>2(x-1)+5. \end{cases}$

Ответы: а) $\left(\frac{18}{7};+\infty\right)$; б) (1; +∞); в) $\left(1;\frac{18}{7}\right)$;

2. Решите двойное неравенство $-3\le\frac{5-3x}{4}\le 2$.

Ответы: а) (−1; +∞]; б) $\left(-\infty;\frac{17}{3}\right]$; в) $\left(-1;\frac{17}{3}\right]$.

3. Найдите допустимые значения переменной для выражения $\sqrt{3x-5}+\frac{2x-3}{\sqrt{3x-7}}$.

Ответы: а) $x \neq \frac{7}{3}$; б) $\left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$; в) $\left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$.

III. Изучение нового материала

Прежде всего отметим, что в реальной жизни, науке и технике характеристики объектов выражаются только **приближенными значениями**. Например, длина железнодорожного рельса составляет примерно 12 м. Однако сталь при нагревании расширяется и длина рельса увеличивается. При охлаждении сталь сужается и длина рельса уменьшается. В среднем в России перепад зимних и летних температур составляет 60°, что влияет на длину рельса. Поэтому при прокладке железнодорожного пути между рельсами оставляют зазор в 2 см. То есть в этом случае меняется характеристика самого рельса.

Другой причиной приближенных значений физических величин является **несовершенство методов измерений** таких величин. Например, по радиоактивному распаду элементов был определен возраст существования Земли (примерно 4,5 млрд лет) и наблюдаемой Вселенной (около 15 млрд лет).

Теперь рассмотрим некоторые способы записи приближенных чисел. Длина рельса равна 1200 см с точностью до 2 см, т. е. точное значение длины l (в см) может отличаться от приближенного значения, равного 1200, не более чем на 2: $1200 - 2 \leq l \leq 1200 + 2$ или $1198 \leq l \leq 1202$. Такое неравенство принято записывать в виде $|l - 1200| \leq 2$. Поэтому длина рельса составляет 1200 с погрешностью (абсолютной погрешностью) 2.

Вообще говоря, **погрешностью приближения (абсолютной погрешностью) называют модуль разности между точным значением величины x и ее приближенным значением a**, т. е. $|x - a|$.

Еще одной причиной существования приближенных значений чисел является **существование бесконечных десятичных дробей**. Понятно, что проводить вычисления с такими дробями невозможно (хотя бы потому, что на запись такой дроби понадобится неограниченное время).

Пример 1

Найдем приближенные значения для чисел:

а) $\frac{5}{11}$; б) $\frac{5}{7}$; в) π; г) 0,12345...

а) При делении уголком получим бесконечную периодическую десятичную дробь $\frac{5}{11}=0,(45)$. Поэтому $\frac{5}{11}\approx 0,45$ – приближенное значение числа по недостатку с точностью до 0,01 и $\frac{5}{11}\approx 0,46$ – приближенное значение числа по избытку с точностью до 0,01. При этом погрешность такого равенства $\frac{5}{11}\approx 0,45$ или $\frac{5}{11}\approx 0,46$ записывается $\left|\frac{5}{11}-0,45\right|$ или $\left|\frac{5}{11}-0,46\right|$ и равна 0,01.

б) При делении уголком получим бесконечную периодическую десятичную дробь $\frac{5}{7}=0,(714285)$. Поэтому $\frac{5}{7}\approx 0,714$ приближенное значение числа $\frac{5}{7}$ по недостатку с точностью до 0,001 и $\frac{5}{7}\approx 0,715$ – приближенное значение числа по избытку с точностью до 0,001. При этом погрешность такого равенства $\frac{5}{7}\approx 0,714$ или $\frac{5}{7}\approx 0,715$ записывается $\left|\frac{5}{7}-0,714\right|$ или $\left|\frac{5}{7}-0,715\right|$ и равна 0,001.

в) Иррациональное число π записывается в виде бесконечной непериодической десятичной дроби $\pi\approx 3,1415926...$. Поэтому $\pi\approx 3,1$ – приближенное значение числа по недостатку с точностью до 0,1 и $\pi\approx 3,2$ – приближенное значение числа по избытку с точностью до 0,1. При этом погрешность такого равенства $\pi\approx 3,1$ или $\pi\approx 3,2$ записывается $|\pi-3,1|$ или $|\pi-3,2|$ и равна 0,1.

г) Иррациональное число $x = 0,12345...$ можно записать в виде $x\approx 0,12$ с точностью до 0,01 по недостатку и $x\approx 0,13$ с точностью до 0,1 по избытку. При этом погрешность такого равенства $x\approx 0,12$ или $x\approx 0,13$ записывается $|x-0,12|$ или $|x-0,13|$ и равна 0,1.

Вообще говоря, **если a – приближенное значение числа x и $|x-a|\le h$, то абсолютная погрешность приближения не превосходит h или число x равно числу a с точностью до h.**

Вернемся еще раз, например, к задаче 1в). Возникает естественный вопрос: какое же приближение точнее $\pi\approx 3,1$ или $\pi\approx 3,2$? Общепринято **правило округления**: если первая отбрасываемая цифра меньше 5, то берут приближение по недостатку; если первая отбрасываемая цифра больше или равна 5, то берут приближение по избытку.

Пример 2

Будем округлять число $\pi \approx 3{,}1415926...$ с разной точностью.

В соответствии с приведенным правилом округлим $\pi \approx 3$ с точностью до 1; $\pi \approx 3{,}1$ с точностью до 0,1; $\pi \approx 3{,}14$ с точностью до 0,01; $\pi \approx 3{,}142$ с точностью до 0,001; $\pi \approx 3{,}1416$ с точностью до 0,0001 и т. д.

IV. Контрольные вопросы

1. Укажите причины приближенных значений технических и физических величин.
2. Причины приближенных значений чисел.
3. Что называют погрешностью приближения числа?
4. Правило округления чисел.

V. Задание на уроке

№ 35.1 (а, в); 35.2 (б); 35.4; 35.7 (а); 35.9 (а, б); 35.10 (б, г).

VI. Задание на дом

№ 35.1 (б, г); 35.2 (в); 35.5; 35.7 (б); 35.9 (в, г); 35.10 (а, б).

VII. Подведение итогов урока

§ 36. Стандартный вид положительного числа

Урок 94. Запись числа в стандартном виде

Цель: получить навыки записи числа в стандартном виде.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

III. Изучение нового материала

В окружающем нас мире встречаются объекты, характеристики которых измеряются как очень большими, так и очень малыми числами. Например, масса Земли выражается огромным числом $598\underbrace{00...0}_{25\text{ нулей}}$ г, масса атома водорода – $0,\underbrace{00...0}_{20\text{ нулей}}17$ г.

В таком (обычном десятичном) виде большие и малые числа неудобно запоминать (в случае характеристик физических объектов), читать и записывать, неудобно выполнять над ними какие-либо действия. Поэтому принято записывать число a в виде $a = a_0 \cdot 10^m$, где m – целое число. Например, $187000 = 0,187 \cdot 10^6$ или $187000 = 18,7 \cdot 10^4$ и т. д. Для удобства сравнения чисел принято числа записывать **в едином стандартном виде**. Для этого при записи числа a выбирают множитель a_0 в промежутке $1 \le a_0 < 10$. Например: $187000 = 1,87 \cdot 10^5$, при этом множитель $1 \le 1,87 < 10$.

Стандартным видом числа a называют его запись в виде $a_0 \cdot 10^m$ (где $1 \le a_0 < 10$ и m – целое число). Число m называют порядком числа a.

Пример 1

В стандартном виде масса Земли составляет $598\underbrace{00...0}_{25\text{ нулей}}$ г = $= 5,98 \cdot 10^{27}$ г; масса атома водорода равна $0,\underbrace{00...0}_{20\text{ нулей}}17$ г $= 1,7 \cdot 10^{-21}$ г.

Таким образом, порядок числа, выражающего в граммах массу Земли, равен 27; а порядок числа, выражающего в граммах массу атома водорода, равен –21. Заметим, что различие в массах Земли и атома водорода составляет 48 порядков, т. е. масса Земли больше массы атома водорода $\approx$ в $10^{48} = 1\underbrace{00...0}_{48\text{ нулей}}$ раз.

Порядок числа дает представление о его величине (т. е. о том, насколько велико или мало это число). Например, если порядок числа a равен 2, то само число a находится в промежутке $100 \le a < 1000$. Если порядок числа a равен –3,то само число a находится в промежутке $0,001 \le a < 0,01$. Большой положительный порядок показывает, что число очень велико. Большой по модулю отрицательный порядок показывает, что число очень мало.

Пример 2

Представим в стандартном виде число $a = 387000$.

В числе a поставим запятую так, чтобы в целой части оказалась одна цифра. Получаем 3,87. Отделив запятой пять цифр справа, мы уменьшим число a в 10^5 раз. Поэтому число больше числа 3,87 в 10^5 раз. Тогда имеем: $a = 3,87 \cdot 10^5$.

Пример 3

Представим в стандартном виде число $a = 0{,}00182$.

В числе a переставим запятую так, чтобы в целой части оказалась одна отличная от нуля цифра. В результате получим 1,82. Переставив запятую на три знака вправо, мы увеличили число a в 10^3 раз. Поэтому число a меньше числа 1,82 в 10^3 раз. Тогда число $a = 1{,}82 : 10^3 = 1{,}82 \cdot \frac{1}{10^3} = 1{,}82 \cdot 10^{-3}$.

Записав числа в стандартном виде, с ними удобно выполнять все арифметические действия.

Пример 4

а) Сложим числа $1{,}8 \cdot 10^3$ и $1{,}2 \cdot 10^2$. Получаем: $1{,}8 \cdot 10^3 + 1{,}2 \cdot 10^2 = 18 \cdot 10^2 + 1{,}2 \cdot 10^2 = 19{,}2 \cdot 10^2 = 1{,}92 \cdot 10^3$.

б) Вычтем те же числа. Имеем: $1{,}8 \cdot 10^3 - 1{,}2 \cdot 10^2 = 18 \cdot 10^2 - 1{,}2 \cdot 10^2 = 16{,}8 \cdot 10^2 = 1{,}68 \cdot 10^3$.

в) Умножим эти же числа. Получаем: $(1{,}8 \cdot 10^3) \cdot (1{,}2 \cdot 10^2) = (1{,}8 \cdot 1{,}2) \cdot (10^3 \cdot 10^2) = 2{,}16 \cdot 10^5$.

г) Наконец, разделим эти числа. Имеем: $(1{,}8 \cdot 10^3) : (1{,}2 \cdot 10^2) = (1{,}8 : 1{,}2) \cdot (10^3 : 10^2) = 1{,}5 \cdot 10^1$.

IV. Задание на уроке

№ 36.1 (а, б); 36.2 (в, г); 36.7 (а, б); 36.10 (а, г); 36.12 (а, б); 36.13 (в, г); 36.15 (а, б); 36.17; 36.19 (в, г).

V. Задание на дом

№ 36.1 (в, г); 36.2 (а, б); 36.7 (в, г); 37.10 (б, в); 36.2 (в, г); 36.13 (а, б); 36.15 (в, г); 36.18; 36.19 (а, б).

VI. Подведение итогов урока

Уроки 95–96. Контрольная работа № 6 по теме «Неравенства»

Цель: проверка знаний учащихся с использованием разноуровневых вариантов.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в 6 вариантах различной сложности (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – сложнее, варианты 5, 6 – самые сложные). При этом сложность вариантов нарастает не очень резко. Каждый вариант содержит 6 задач примерно одинаковой сложности (может быть, несколько сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач. Одна задача является резервной (или запасной) и дает некоторую возможность выбора учащимся. При таких же критериях оценки в случае вариантов 3, 4 дается дополнительно 0,5 балла и в случае вариантов 5, 6 – дополнительно 1,0 балла (учитывая более высокую сложность этих вариантов). Поэтому в случае вариантов 5, 6 оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач.

Выбор вариантов может быть сделан учителем или учащимся (при этом число экземпляров вариантов должно быть достаточным). Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

III. Варианты работы

Вариант 1

Решите неравенство:

1. $3(x-1)>2(3-x)$;
2. $-2\le 3x+1\le 4$.
3. Решите систему неравенств $\begin{cases}3-2x\ge 0,\\ 3x+1>0.\end{cases}$
4. Известно, что $1{,}2<x<1{,}3$ и $2{,}7<y<2{,}8$. Оцените величину $x+2y$.
5. При каких значениях x функция $y=2-4x$ принимает отрицательные значения?
6. Найдите область определения и область значений функции $y=\sqrt{1-2x}$.

Вариант 2

Решите неравенство:

1. $2(x-1)<3(2-x)$;
2. $-3\le 2x-1\le 5$.
3. Решите систему неравенств $\begin{cases}4-3x\ge 0,\\ 2x+1>0.\end{cases}$
4. Известно, что $1{,}8<x<1{,}9$ и $2{,}4<y<2{,}5$. Оцените величину $2x+y$.

5. При каких значениях x функция $y = 3 - 5x$ принимает положительные значения?

6. Найдите область определения и область значений функции $y = \sqrt{2-3x}$.

Вариант 3

1. Докажите неравенство $x^2 + 4x + 16 \geq 12x$.

Решите неравенство:

2. $\frac{x-1}{4} - 1 > \frac{x+1}{3} + 7$;

3. $|x - 3| \leq 2$.

4. Найдите область определения функции $y = \frac{x+1}{\sqrt{x-2}} - 3\sqrt{9-2x}$.

5. Известно, что $1{,}4 < x < 1{,}5$ и $2{,}7 < y < 2{,}8$. Оцените величину $7x - 3y$.

6. При всех значениях параметра a решите неравенство $ax + 1 \geq a^2 - x$.

Вариант 4

1. Докажите неравенство $x^2 + 5x + 25 \geq 15x$.

Решите неравенство:

2. $\frac{1-2x}{3} - 2 < \frac{1-3x}{5} + 4$;

3. $|x - 2| \leq 3$.

4. Найдите область определения функции $y = \frac{2x-3}{\sqrt{x-1}} + 4\sqrt{5-2x}$.

5. Известно, что $2{,}2 < x < 2{,}3$ и $3{,}5 < y < 3{,}6$. Оцените величину $5x - 2y$.

6. При всех значениях параметра a решите неравенство $ax + 1 \geq a^2 + x$.

Вариант 5

Решите неравенство:

1. $(3x^2 + 2)(3x - 2 - (x-3)(2x+1) + 2x^2) < 0$;

2. $|2 - 7x| \geq 1$.

3. Найдите область определения функции $y = \frac{3x-2}{\sqrt{5x+2}} - (x+2)\sqrt{3-4x}$.

4. При каких значениях параметра a решения уравнения $4x = ax - 3$ положительны?

5. На координатной плоскости изобразите множество точек $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют неравенству $|y+2x| \le 1$.

6. При всех значениях a решите неравенство $(a+2)x \ge a^2 - a - 6$.

Вариант 6

Решите неравенство:

1. $(2x^2+3)(4x-3-(x+2)(2x-1)+2x^2) < 0$;

2. $|3-5x| \ge 2$.

3. Найдите область определения функции $y = \dfrac{2x-5}{\sqrt{7x+3}} - (x-3)\sqrt{4-5x}$.

4. При каких значениях параметра a решения уравнения $3x = ax - 7$ отрицательны?

5. На координатной плоскости изобразите множество точек $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют неравенству $|y-3x| \le 2$.

6. При всех значениях a решите неравенство $(a+3)x \le a^2 + a - 6$.

Урок 97. Итоги контрольной работы

Цели: сообщить результаты работы, рассмотреть наиболее типичные ошибки, разобрать трудные задачи.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Итоги контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения.

Данные о результатах работы удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи / Итоги	1	2	3	...	6
+	5				
±	1				
—	1				
Ø	1				

Обозначения:

+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;

± – число решивших задачу со значительными ошибками;

— – число не решивших задачу;

Ø – число не решавших задачу.

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.

3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, решившими эту задачу).

4. Разбор всей контрольной работы (вывесить на стенде ответы к заданиям вариантов и разбор наиболее трудных вариантов).

III. Ответы и решения

Ответы

Вариант 1

1. *Ответ*: $(1,8; +\infty)$.
2. *Ответ*: $[-1; 1]$.
3. *Ответ*: $\left(-\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right]$.
4. *Ответ*: $(6,6; 6,9)$.
5. *Ответ*: $(0,5; +\infty)$.
6. *Ответ*: $(-\infty; 0,5]$.

Вариант 2

1. *Ответ*: $(-\infty; 1,6)$.
2. *Ответ*: $[-1; 3]$.
3. *Ответ*: $\left(-\frac{1}{2}; \frac{4}{3}\right]$.
4. *Ответ*: $(6,0; 6,3)$.
5. *Ответ*: $(-\infty; 0,6)$.
6. *Ответ*: $(-\infty; \frac{2}{3}]$.

Вариант 3

1. *Ответ*: доказано.
2. *Ответ*: $(-\infty; -91)$.
3. *Ответ*: $[1; 5]$.
4. *Ответ*: $(2; 4,5]$.
5. *Ответ*: $(1,4; 2,4)$.
6. *Ответ*: при $a \in (-\infty; -1)$ $x \in (-\infty; a-1]$; при $a = -1$ $x \in (-\infty; +\infty)$; при $a \in (-1; +\infty)$ $x \in [a-1; +\infty)$.

Вариант 4

1. *Ответ*: доказано.
2. *Ответ*: $(-88; +\infty)$.
3. *Ответ*: $[-1; 5]$.
4. *Ответ*: $(1; 2,5]$.
5. *Ответ*: $(3,8; 4,5)$.

6. *Ответ*: при $a \in (-\infty; 1)$ $x \in (-\infty; a+1]$; при $a = 1$ $x \in (-\infty; +\infty)$; при $a \in (1; +\infty)$ $x \in [a+1; +\infty)$.

Решение

Вариант 5

1. Учтем, что при всех значениях x величина $3x^2 + 2 > 0$. По свойству неравенств разделим обе части данного неравенства на эту величину (при этом знак неравенства сохраняется). Получим: $3x - 2 - (x - 3)(2x + 1) + 2x^2 < 0$, или $3x - 2 - 2x^2 - x + 6x + 3 + 2x^2 < 0$, или $8x < -1$, откуда $x < -\frac{1}{8}$, т.е. $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{8}\right)$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{8}\right)$.

2. Неравенство $|2 - 7x| \geq 1$ равносильно совокупности неравенств:
$$\left[\begin{array}{l} 2-7x \leq -1, \\ 2-7x \geq 1, \end{array}\right. \text{ или } \left[\begin{array}{l} 3 \leq 7x, \\ 1 \geq 7x, \end{array}\right. \text{ или } \left[\begin{array}{l} x \geq \frac{3}{7}, \\ x \leq \frac{1}{7}, \end{array}\right. \text{ т. е. } x \in \left(-\infty; \frac{1}{7}\right] \cup \left[\frac{3}{7}; +\infty\right).$$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{1}{7}\right] \cup \left[\frac{3}{7}; +\infty\right)$.

3. Область определения функции задается системой неравенств:
$$\begin{cases} 5x+2 > 0, \\ 3-4x \geq 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 5x > -2, \\ 3 \geq 4x, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x > -\frac{2}{5}, \\ x \leq \frac{3}{4}, \end{cases} \text{ т. е. } x \in \left(-\frac{2}{5}; \frac{3}{4}\right].$$

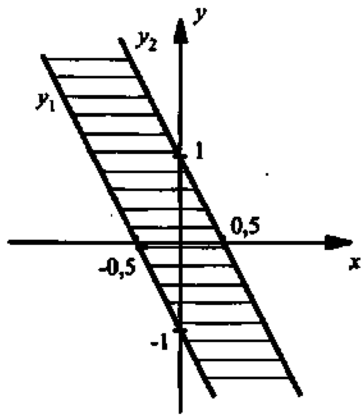
Ответ: $\left(-\frac{2}{5}; \frac{3}{4}\right]$.

4. Найдем решение уравнения $4x = ax - 3$ или $3 = (a - 4)x$, откуда $x = \frac{3}{a-4}$. Так как решения уравнения положительны, то получаем неравенство $\frac{3}{a-4} > 0$ или $a - 4 > 0$. Решение этого неравенства $a \in (4; +\infty)$.

Ответ: $(4; +\infty)$.

5. Неравенство $|y + 2x| \leq 1$ равносильно двойному неравенству $-1 \leq y + 2x \leq 1$. Вычтем из всех частей неравенства $2x$ и получим $-1 - 2x \leq y \leq 1 - 2x$. Построим две граничные прямые $y_1 = -1 - 2x$ и $y_2 = 1 - 2x$. Подставив координаты начала координат, видим, что

неравенству удовлетворяют точки, лежащие между и на прямых y_1 и y_2 (эта область заштрихована).



Ответ: см. график.

6. Разложим правую часть неравенства на множители и получим $(a+2)x \geq (a+2)(a-3)$. Рассмотрим три случая.

а) Если $a+2<0$ (т. е. $a<-2$), то разделим обе части данного неравенства на отрицательную величину $a+2$ (при этом знак неравенства меняется на противоположный) и получаем $x \leq a-3$.

б) Если $a+2=0$ (т. е. $a=-2$), то делить на нулевой множитель нельзя. Подставив значение $a=-2$ в данное неравенство, получим $0 \cdot x \geq 0$. Очевидно, что такое неравенство выполняется при всех x, т. е. $x \in (-\infty; +\infty)$.

в) Если $a+2>0$ (т. е. $a>-2$), то разделим обе части на положительную величину $a+2$ (при этом знак неравенства сохраняется) и получаем $x \geq a-3$.

Теперь выпишем ответ в порядке возрастания параметра a.

Ответ: при $a \in (-\infty; -2)$ $x \in (-\infty; a-3]$, при $a=-2$ $x \in (-\infty; +\infty)$, при $a \in (-2; +\infty)$ $x \in [a-3; +\infty)$.

Вариант 6

1. Учтем, что при всех значениях x величина $2x^2+3>0$. По свойству неравенств разделим обе части данного неравенства на эту величину (при этом знак неравенства сохраняется). Получим: $4x-3-(x+2)(2x-1)+2x^2<0$, или $4x-3-2x^2-4x+x+2+2x^2<0$, или $x<1$, т. е. $x \in (-\infty; 1)$.

Ответ: $(-\infty; 1)$.

2. Неравенство $|3-5x| \ge 2$ равносильно совокупности неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}3-5x \le -2,\\ 3-5x \ge 2,\end{array}\right. \text{ или } \left[\begin{array}{l}5 \le 5x,\\ 1 \ge 5x,\end{array}\right. \text{ или } \left[\begin{array}{l}x \ge 1,\\ x \le \frac{1}{5},\end{array}\right. \text{ т. е. } x \in \left(-\infty; \frac{1}{5}\right] \cup [1; +\infty).$$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{1}{5}\right] \cup [1; +\infty)$.

3. Область определения функции задается системой неравенств:

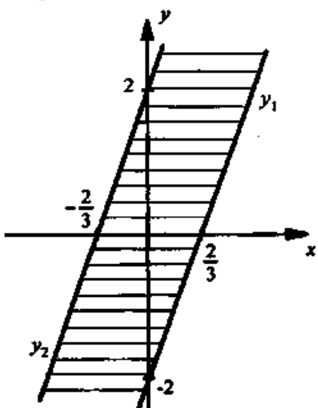
$$\begin{cases}7x+3>0,\\ 4-5x \ge 0,\end{cases} \text{ или } \begin{cases}7x>-3,\\ 4 \ge 5x,\end{cases} \text{ или } \begin{cases}x>-\frac{3}{7},\\ x \le \frac{4}{5},\end{cases} \text{ т. е. } x \in \left(-\frac{3}{7}; \frac{4}{5}\right].$$

Ответ: $\left(-\frac{3}{7}; \frac{4}{5}\right]$.

4. Найдем решение уравнения $3x = ax - 7$ или $7 = (a-3)x$, откуда $x = \frac{7}{a-3}$. Так как решения уравнения отрицательны, то получаем неравенство $\frac{7}{a-3} < 0$ или $a-3<0$. Решение этого неравенства $a \in (-\infty; 3)$.

Ответ: $(-\infty; 3)$.

5. Неравенство $|y-3x| \le 2$ равносильно двойному неравенству $-2 \le y-3x \le 2$. Прибавим ко всем частям неравенства $3x$ и получим $3x-2 \le y \le 3x+2$. Построим две граничные прямые $y_1 = 3x-2$ и $y_2 = 3x+2$. Подставив координаты начала координат, видим, что неравенству удовлетворяют точки, лежащие между и на прямых y_1 и y_2 (эта область заштрихована).



Ответ: см. график.

6. Разложим правую часть неравенства на множители и получим $(a+3)x \le (a+3)(a-2)$. Рассмотрим три случая.

а) Если $a + 3 < 0$ (т. е. $a < -3$), то разделим обе части данного неравенства на отрицательную величину $a + 3$ (при этом знак неравенства меняется на противоположный) и получаем $x \ge a-2$.

б) Если $a + 3 = 0$ (т. е. $a = -3$), то делить на нулевой множитель нельзя. Подставив значение $a = -3$ в данное неравенство, получим $0 \cdot x \le 0$. Очевидно, что такое неравенство выполняется при всех x, т. е. $x \in (-\infty; +\infty)$.

в) Если $a + 3 > 0$ (т. е. $a > -3$), то разделим обе части на положительную величину $a + 3$ (при этом знак неравенства сохраняется) и получаем $x \le a-2$.

Теперь выпишем ответ в порядке возрастания параметра a.

Ответ: при $a \in (-\infty; -3)$ $x \in [a-2; +\infty)$, при $a = -3$ $x \in (-\infty; +\infty)$, при $a \in (-3; +\infty)$ $x \in (-\infty; a-2]$.

Уроки № 98–99. Зачетная работа по теме «Неравенства»

Цель: проверка знаний учащихся по вариантам одинаковой сложности.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Характеристика зачетной работы

Работа составлена в двух равноценных вариантах. По сравнению с контрольной работой увеличено количество заданий. Соответственно у учащихся возрастает возможность выбора задач. Все задания разбиты на блоки А, В и С. Самые простые задачи находятся в части А, более сложные – в части В, еще сложнее – в части С. Каждая задача из блока А оценивается в 1 балл, из блока В – в 2 балла, из блока С – в 3 балла. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов и блока С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» – за 10 баллов, оценка «5» – за 14 баллов.

Так как эта работа является зачетной, то в нее не включены принципиально новые задачи. Поэтому разбору заданий работы отдельного занятия можно и не посвящать (решения задач могут быть вывешены на стенде). Для стендового размещения разбор вариантов приводится.

III. Варианты зачетной работы

Вариант 1

А

Решите неравенство:

1. $3x+\frac{x}{2}\le 14$;

2. $3x^2-(x-2)(3x+1)>0$.

3. Решите систему неравенств $\begin{cases}5x-7>0,\\3x-8\le 0.\end{cases}$

4. При каких значениях x функция $y=3x+5$ принимает отрицательные значения?

5. Найдите целые решения неравенства $-2\le 3x+1<7$.

6. Длины сторон прямоугольника (в см) удовлетворяют условию $1{,}2<a<1{,}3$ и $2{,}7<b<2{,}8$. Оцените периметр прямоугольника.

7. При каких значениях a уравнение $3x+2=a$ имеет положительный корень?

В

8. Сравните числа $A=234\cdot 236$ и $B=235^2$.

9. Решите неравенство $|2-3x|\le 7$.

10. Найдите область определения функции $y=\frac{3x-2}{\sqrt{4x-1}}+\sqrt{2x+3}$.

11. Решите неравенство $(5x^2+7)(3x-2)\ge 0$.

С

12. Решите неравенство $\frac{8}{x-2}>2$.

13. Докажите неравенство $a^2+5\ge 4(a-b-b^2)$.

14. В раствор объемом 8 л, содержащий 60 % кислоты, вливают раствор, содержащий 20% кислоты. Сколько нужно влить второго раствора в первый, чтобы смесь содержала кислоты не меньше 30% и не больше 40%?

Вариант 2

А

Решите неравенство:

1. $2x+\frac{x}{3}\ge 21$;

2. $4x^2-(2x-1)(2x+3)<0$.

3. Решите систему неравенств $\begin{cases} 3x-8 \ge 0, \\ 4x-17 < 0. \end{cases}$

4. При каких значениях x функция $y = 2x + 5$ принимает положительные значения?

5. Найдите целые решения неравенства $-1 < 2x + 3 \le 5$.

6. Длины сторон прямоугольника (в см) удовлетворяют условию $2{,}3 < a < 2{,}4$ и $3{,}1 < b < 3{,}2$. Оцените периметр прямоугольника.

7. При каких значениях a уравнение $2x + 3 = a$ имеет отрицательный корень?

B

8. Сравните числа $A = 124 \cdot 126$ и $B = 125^2$.

9. Решите неравенство $|3 - 5x| \le 7$.

10. Найдите область определения функции $y = \dfrac{2x-1}{\sqrt{3x+1}} + \sqrt{5x-2}$.

11. Решите неравенство $(3x^2 + 5)(4x + 3) \le 0$.

C

12. Решите неравенство $\dfrac{2}{x-3} > 1$.

13. Докажите неравенство $4a^2 + b^2 \ge 2(2a + 3b - 5)$.

14. В раствор объемом 10 л, содержащий 70% кислоты, вливают раствор, содержащий 40% кислоты. Сколько нужно влить второго раствора в первый, чтобы смесь содержала кислоты не меньше 50% и не больше 60%?

IV. Разбор вариантов работы

Вариант 1

1. Умножим обе части неравенства $3x + \dfrac{x}{2} \le 14$ на положительное число 2 (при этом знак неравенства сохраняется) и получим: $6x + x \le 28$ или $7x \le 28$. Разделим обе части неравенства на положительное число 7 (знак неравенства сохраняется) и получим $x \le 4$, т. е. $x \in (-\infty; 4)$.

Ответ: $(-\infty; 4]$.

2. В неравенстве $3x^2 - (x - 2)(3x + 1) > 0$ раскроем скобки и приведем подобные члены. Получаем: $3x^2 - 3x^2 - x + 6x + 2 > 0$ или $5x > -2$. Разделим обе части на положительное число 5 (знак неравенства сохраняется) и найдем $x > -0{,}4$, т. е. $x \in (-0{,}4; +\infty)$.

Ответ: $(-0{,}4; +\infty)$.

3. В системе неравенств $\begin{cases}5x-7>0,\\3x-8\le 0\end{cases}$ решим каждое неравенство:

$\begin{cases}5x>7,\\3x\le 8\end{cases}$ и $\begin{cases}x>\dfrac{7}{5},\\x\le\dfrac{8}{3}.\end{cases}$ Получаем решение данной системы неравенств

$\dfrac{7}{5}<x\le\dfrac{8}{3}$, т. е. $x\in\left(\dfrac{7}{5};\dfrac{8}{3}\right]$.

Ответ: $\left(\dfrac{7}{5};\dfrac{8}{3}\right]$.

4. Если функция $y = 3x + 5$ принимает отрицательные значения, то выполняется неравенство $3x + 5 < 0$ или $3x < -5$. Решение этого неравенства $x<-\dfrac{5}{3}$, т. е. $x\in\left(-\infty;-\dfrac{5}{3}\right)$.

Ответ: $\left(-\infty;-\dfrac{5}{3}\right)$.

5. Сначала решим двойное неравенство $-2 \le 3x + 1 < 7$. Вычтем из всех частей неравенства число 1 и получим $-3 \le 3x < 6$. Разделим все части неравенства на положительное число 3 (при этом знаки неравенства сохраняются) и найдем $-1 \le x < 2$, т. е. $x\in[-1; 2)$. Выпишем все целые числа, входящие в этот промежуток: -1; 0; 1.

Ответ: -1; 0; 1.

6. Периметр прямоугольника P равен $P = 2(a + b)$. Оценим сначала сумму $a + b$. Для этого почленно сложим неравенства одного знака $1{,}2 < a < 1{,}3$ и $2{,}7 < b < 2{,}8$ и получим $3{,}9 < a + b < 4{,}1$. Умножим все части этого неравенства на положительное число 2 (знаки неравенства сохраняются) и найдем: $7{,}8 < 2(a + b) > 8{,}2$ или $P\in(7{,}8; 8{,}2)$.

Ответ: (7,8; 8,2).

7. Сначала решим уравнение $3x + 2 = a$. Получаем $3x = a - 2$, откуда $x=\dfrac{a-2}{3}$. Так как этот корень положительный, то получаем неравенство $\dfrac{a-2}{3}>0$ или $a-2>0$, откуда $a>2$, т. е. $a\in(2; +\infty)$.

Ответ: $(2; +\infty)$.

8. Запишем число A в виде $A = 234 \cdot 236 = (235 - 1)(235 + 1) = 235^2 - 1^2 = 235^2 - 1$. Тогда видно, что число A меньше числа $B = 235^2$. Итак, $A < B$.

Ответ: $A < B$.

9. Неравенство $|2 - 3x| \le 7$ равносильно двойному неравенству $-7 \le 2 - 3x \le 7$. Вычтем из всех частей неравенства число 2 и получим $-9 \le -3x \le 5$. Разделим все части неравенства на отрицательное число -3. При этом знаки неравенства меняются на противоположные. Получим $3 \ge x \ge -\frac{5}{3}$, т. е. $x \in \left[-\frac{5}{3}; 3\right]$.

Ответ: $\left[-\frac{5}{3}; 3\right]$.

10. Область определения данной функции задается условиями: подкоренные выражения неотрицательны и делить на нуль нельзя. Поэтому получаем систему неравенств $\begin{cases} 4x - 1 > 0, \\ 2x + 3 \ge 0. \end{cases}$ Решим каждое неравенство системы $\begin{cases} x > \frac{1}{4}, \\ x \ge -\frac{3}{2} \end{cases}$ и найдем решение системы $x > \frac{1}{4}$, т.е. $x \in \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

Ответ: $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

11. В неравенстве $(5x^2 + 7)(3x + 2) \ge 0$ множитель $5x^2 + 7$ положительный при всех значениях x. Поэтому разделим обе части данного неравенства на этот множитель (при этом знак неравенства сохраняется) и получаем равносильное неравенство $3x + 2 \ge 0$. Решение этого неравенства $x \ge -\frac{2}{3}$, т.е. $x \in \left[-\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Ответ: $\left[-\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

12. В неравенстве $\frac{8}{x-2} > 2$, очевидно, знаменатель положительный, т. е. $x - 2 > 0$ или $x > 2$. Умножим обе части данного неравен-

ства на положительную величину $x - 2$. При этом знак неравенства сохраняется. Получаем: $8 > 2(x - 2)$ или $4 > x - 2$, откуда $6 > x$. Таким образом $2 < x < 6$ или $x \in (2; 6)$.

Ответ: (2; 6).

13. Для доказательства неравенства $a^2 + 5 \geq 4(a - b - b^2)$ раскроем скобки, перенесем все члены в левую часть и выделим полные квадраты по переменным a и b. Получаем: $a^2 + 5 - 4a + 4b + 4b^2 \geq 0$, или $(a^2 - 4a + 4) + (4b^2 + 4b + 1) \geq 0$, или $(a - 2)^2 + (2b + 1)^2 \geq 0$. Так как левая часть неравенства является сумой квадратов двух величин $a - 2$ и $2b + 1$, то при всех a и b такое неравенство выполняется.

Ответ: доказано.

14. В растворе объемом 8 л, содержащем 60% кислоты, находится $\frac{8}{100} \cdot 60 = 4{,}8$ (л) чистой кислоты. Пусть добавили x л раствора, содержащего 20% кислоты. Тогда в этом растворе находится $\frac{x}{100} \cdot 20 = 0{,}2x$ (л) чистой кислоты. Посчитаем процентное содержание кислоты в смеси.

Количество чистой кислоты в смеси равно $(4{,}8 + 0{,}2x)$ л. Объем смеси равен $(8 + x)$ л. Тогда процентное содержание кислоты в смеси $P = \frac{4{,}8 + 0{,}2x}{8 + x} \cdot 100 = \frac{480 + 20x}{8 + x}$. По условию $30 \leq P \leq 40$. Получаем систему неравенств: $\begin{cases} 30 \leq \frac{480 + 20x}{8 + x}, \\ \frac{480 + 20x}{8 + x} \leq 40. \end{cases}$ Так как величина $8 + x > 0$, то умножим каждое неравенство на эту величину. При этом знак неравенства сохраняется. Получаем систему линейных неравенств: $\begin{cases} 240 + 30x \leq 480 + 20x, \\ 480 + 20x \leq 320 + 40x, \end{cases}$ или $\begin{cases} 10x \leq 240, \\ 160 \leq 20x, \end{cases}$ или $\begin{cases} x \leq 24, \\ 8 \leq x, \end{cases}$ откуда $8 \leq x \leq 24$.

Ответ: [8; 24] л.

Вариант 2

1. Умножим обе части неравенства $2x + \frac{x}{3} \geq 21$ на положительное число 3 (при этом знак неравенства сохраняется) и получим:

$6x + x \geq 63$ или $7x \geq 63$. Разделим обе части неравенства на положительное число 7 (знак неравенства сохраняется) и получим $x \geq 9$, т. е. $x \in [9; +\infty)$.

Ответ: [9; +∞].

2. В неравенстве $4x^2 - (2x - 1)(2x + 3) < 0$ раскроем скобки и приведем подобные члены. Получаем: $4x^2 - 4x^2 - 6x + 2x + 3 < 0$ или $3 < 4x$. Разделим обе части на положительное число 4 (знак неравенства сохраняется) и найдем $x > \frac{3}{4}$, т. е. $x \in \left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

Ответ: $(\frac{3}{4};\ +\infty)$.

3. В системе неравенств $\begin{cases} 3x - 8 \geq 0, \\ 4x - 17 < 0 \end{cases}$ решим каждое неравенство: $\begin{cases} 3x \geq 8, \\ 4x < 17 \end{cases}$ и $\begin{cases} x \geq \frac{8}{3}, \\ x < \frac{17}{4}. \end{cases}$ Получаем решение данной системы неравенств $\frac{8}{3} \leq x < \frac{17}{4}$, т. е. $x \in \left[\frac{8}{3}; \frac{17}{4}\right)$.

Ответ: $\left[\frac{8}{3}; \frac{17}{4}\right)$.

4. Если функция $y = 2x + 5$ принимает положительные значения, то выполняется неравенство $2x + 5 > 0$ или $2x > -5$. Решение этого неравенства $x > -\frac{5}{2}$, т. е. $x \in \left(-\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

Ответ: $\left(-\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

5. Сначала решим двойное неравенство $-1 < 2x + 3 \leq 5$. Вычтем из всех частей неравенства число 4 и получим $-4 < 2x \leq 2$. Разделим все части неравенства на положительное число 2 (при этом знаки неравенства сохраняются) и найдем $-2 < x \leq 1$, т. е. $x \in (-2; 1]$. Выпишем все целые числа, входящие в этот промежуток: $-1; 0; 1$.

Ответ: $-1; 0; 1$.

6. Периметр прямоугольника P равен $P = 2(a + b)$. Оценим сначала сумму $a + b$. Для этого почленно сложим неравенства одного

знака $2{,}3 < a < 2{,}4$ и $3{,}1 < b < 3{,}2$ и получим $5{,}4 < a + b < 5{,}6$. Умножим все части этого неравенства на положительное число 2 (знаки неравенства сохраняются) и найдем: $10{,}8 < 2(a + b) < 11{,}2$ или $P \in (10{,}8; 11{,}2)$.

Ответ: $(10{,}8; 11{,}2)$.

7. Сначала решим уравнение $2x + 3 = a$. Получаем $2x = a - 3$, откуда $x = \frac{a-3}{2}$. Так как этот корень отрицательный, то получаем неравенство $\frac{a-3}{2} < 0$ или $a - 3 < 0$, откуда $a < 3$, т. е. $a \in (-\infty; 3)$.

Ответ: $(-\infty; 3)$.

8. Запишем число A в виде $A = 124 \cdot 126 = (125 - 1)(125 + 1) = 125^2 - 1^2 = 125^2 - 1$. Тогда видно, что число A меньше числа $B = 125^2$. Итак, $A < B$.

Ответ: $A < B$.

9. Неравенство $|3 - 5x| \le 7$ равносильно двойному неравенству $-7 \le 3 - 5x \le 7$. Вычтем из всех частей неравенства число 3 и получим $-10 \le -5x \le 4$. Разделим все части неравенства на отрицательное число -5. При этом знаки неравенства меняются на противоположные. Получим $2 \ge x \ge -\frac{4}{5}$, т. е. $x \in \left[-\frac{4}{5}; 2\right]$.

Ответ: $\left[-\frac{4}{5}; 2\right]$.

10. Область определения данной функции задается условиями: подкоренные выражения неотрицательны и делить на нуль нельзя. Поэтому получаем систему неравенств $\begin{cases} 3x+1>0, \\ 5x-2 \ge 0. \end{cases}$ Решим каждое неравенство системы $\begin{cases} x > -\frac{1}{3}, \\ x \ge \frac{2}{5} \end{cases}$ и найдем решение системы $x \ge \frac{2}{5}$, т. е. $x \in \left[\frac{2}{5}; +\infty\right)$.

Ответ: $\left[\frac{2}{5}; +\infty\right)$.

11. В неравенстве $(3x^2 + 5)(4x + 3) \le 0$ множитель $3x^2 + 5$ положительный при всех значениях x. Поэтому разделим обе части данного неравенства на этот множитель. При этом знак неравенства сохраняется и получаем равносильное неравенство $4x + 3 \le 0$. Решение этого неравенства $x \le -\frac{3}{4}$, т.е. $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{4}\right]$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{3}{4}\right]$.

12. В неравенстве $\frac{2}{x-3} > 1$, очевидно, знаменатель положительный, т. е. $x - 3 > 0$ или $x > 3$. Умножим обе части данного неравенства на положительную величину $x - 3$. При этом знак неравенства сохраняется. Получаем: $2 > x - 3$, откуда $5 > x$. Таким образом, $3 < x < 5$ или $x \in (3; 5)$.

Ответ: (3; 5).

13. Для доказательства неравенства $4a^2 + b^2 \ge 2(2a + 3b - 5)$ раскроем скобки, перенесем все члены в левую часть и выделим полные квадраты по переменным a и b. Получаем: $4a^2 + b^2 - 4a - 6b + 10 \ge 0$, или $(4a^2 - 4a + 1) + (b^2 - 6b + 9) \ge 0$, или $(2a - 1)^2 + (b - 3)^2 \ge 0$. Так как левая часть неравенства является сумой квадратов двух величин $2a - 1$ и $b - 3$, то при всех a и b такое неравенство выполняется.

Ответ: доказано.

14. В растворе объемом 10 л, содержащем 70% кислоты, находится $\frac{10}{100}\cdot 70 = 7$ (л) чистой кислоты. Пусть добавили x л раствора, содержащего 40% кислоты. Тогда в этом растворе находится $\frac{x}{100}\cdot 40 = 0,4x$ (л) чистой кислоты. Посчитаем процентное содержание кислоты в смеси.

Количество чистой кислоты в смеси равно $(7 + 0,4x)$ л. Объем смеси равен $(10 + x)$ л. Тогда процентное содержание кислоты в смеси $P = \frac{7 + 0,4x}{10 + x}\cdot 100 = \frac{700 + 40x}{10 + x}$. По условию $50 \le P \le 60$. Получаем систему неравенств: $\begin{cases} 50 \le \dfrac{700+40x}{10+x}, \\ \dfrac{700+40x}{10+x} \le 60. \end{cases}$ Так как величина $10 + x > 0$, то умножим каждое неравенство на эту величину. При этом знак неравенства сохраняется. Получаем систему линейных неравенств: $\begin{cases} 500+50x \le 700+40x, \\ 700+40x \le 600+60x, \end{cases}$ или $\begin{cases} 10x \le 200, \\ 100 \le 20x, \end{cases}$ или $\begin{cases} x \le 20, \\ 5 \le x, \end{cases}$ откуда $5 \le x \le 20$.

Ответ: [5; 20] л.

Итоговое повторение

Уроки 100–101. Графики функций

Цель: решение типичных задач по теме.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение материала

Функция $y = ax^2 + bx + c$ (где a, b, c – заданные числа, $a \neq 0$, x – переменная), называется **квадратичной функцией**. Значения x, при которых значение функции y равно нулю, называются **нулями квадратичной функции**.

Кривая, являющаяся графиком функции $y = x^2$, называется **параболой. Основные свойства функции $y = x^2$:**

1) Значение функции $y = x^2$ положительно при $x \neq 0$ и равно нулю при $x = 0$. Парабола касается оси абсцисс в начале координат.

2) Парабола симметрична относительно оси ординат.

3) Функция $y = x^2$ возрастающая на промежутке $x \geq 0$ и убывающая на промежутке $x \leq 0$.

График функции $y = ax^2$ при любом $a \neq 0$ также называют параболой. При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, при $a < 0$ – вниз.

В самом общем случае график функции $y = ax^2 + bx + c$ также называют параболой. Любую квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$ с помощью выделения полного квадрата можно записать в виде $y = a(x - x_0)^2 + y_0$, где $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, $y_0 = y(x_0) = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ – координаты вершины параболы.

Основные свойства параболы:

1) Ветви параболы направлены вверх при $a > 0$ и вниз при $a < 0$.

2) Парабола симметрична относительно прямой $x = -\dfrac{b}{2a}$.

3) Координаты вершины параболы $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ и $y_0 = y(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$.

4) Квадратичная функция при $a > 0$ возрастает на промежутке

$x \geq x_0$ и убывает на промежутке $x \leq x_0$. При $a < 0$ функция возрастает на промежутке $x \leq x_0$ и убывает на промежутке $x \geq x_0$.

5) Функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает наименьшее или наибольшее значение в точке $x_0 = -\frac{b}{2a}$, которая является абсциссой вершины параболы. Если $a > 0$,то функция имеет наименьшее значение, если $a < 0$, то функция имеет наибольшее значение.

Функция $y = \frac{k}{x}$ (где k – число) называется **обратно пропорциональной зависимостью.** Кривая, являющаяся графиком функции $y = \frac{k}{x}$, называется **гиперболой. Основные свойства** этой функции:

1) Определена при всех x, кроме $x = 0$.
2) Функция убывает при $k > 0$ и возрастает при $k < 0$.
3) Область значений функции $y \in (-\infty; +\infty)$.
4) Функция не ограничена.
5) График функции симметричен относительно начала координат.
6) Ветви гиперболы при $k > 0$ расположены в I и III четвертях и при $k < 0$ – во II и IV четвертях.

III. Задание на уроке

№ 3 (а, б); 4; 6 (а, в); 11 (а); 12; 15 (в, г); 18 (а, б); 24; 32 (в); 33 (а); 37 (г); 40; 43 (а); 47; 59 (а); 63; 66 (а, б); 70 (б); 72 (а, б); 73 (а).

IV. Задание на дом

№ 3 (в, г); 6 (б, г); 11 (б); 13; 15 (а, б); 18 (в, г); 25; 32 (г); 33 (б); 38 (г); 41; 43 (б); 48; 59 (б); 64; 66 (в, г); 70 (г); 72 (в, г); 73 (б).

V. Подведение итогов урока

Уроки 102–103. Уравнения

Цель: решение типичных задач по теме.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение материала

Квадратным уравнением называют уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x – переменная (неизвестная), a, b, c – некоторые числа (причем

$a \neq 0$). Число a – первый коэффициент, b – второй коэффициент, c – свободный член уравнения.

Неполным квадратным уравнением называют уравнение, в котором хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю.

Решение неполного квадратного уравнения основано на **разложении его левой части на множители.**

Если $b = 0$, то уравнение имеет вид $ax^2 + c = 0$ (при $c \neq 0$).

При $-\frac{c}{a} > 0$ уравнение имеет два корня $x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$ и $x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$;

при $-\frac{c}{a} < 0$ уравнение корней не имеет.

Если $c = 0$, то уравнение имеет вид $ax^2 + bx = 0$ (при $b \neq 0$). Уравнение имеет два корня $x_1 = 0$ и $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Если $b = 0$ и $c = 0$, то уравнение имеет вид $ax^2 = 0$. Уравнение имеет единственный корень $x = 0$.

Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ решается **способом выделения квадрата двучлена.**

Выражение $D = b^2 - 4ac$ называют **дискриминантом** квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Если $D > 0$, то уравнение имеет два корня $x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ и $x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ (или $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$). Если $D = 0$, то уравнение имеет единственный корень $x = -\frac{b}{2a}$. Если $D < 0$, то уравнение корней не имеет.

Выражение $D_1 = k^2 - ac$ называют **дискриминантом** квадратного уравнения $ax^2 + 2kx + c = 0$ (уравнение со вторым четным коэффициентом). Если $D_1 > 0$, то уравнение имеет два корня $x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}$. Если $D_1 = 0$, то уравнение имеет единственный корень $x = -\frac{k}{a}$. Если $D_1 < 0$, то уравнение корней не имеет.

Теорема Виета.

Если приведенное квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1 и x_2, то их сумма $x_1 + x_2 = -p$ и произведение $x_1x_2 = q$.

Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни x_1 и x_2, то их сумма $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и произведение $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

Обратная теорема Виета.

Если числа m и n такие, что их сумма равна $-p$, а произведение равно q, то числа m и n являются корнями приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Уравнение, обе части которого являются рациональными выражениями, называют **рациональным.**

Решение дробных рациональных уравнений:

1) находят общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;

2) умножают обе части уравнения на этот общий знаменатель;

3) решают получившееся целое уравнение;

4) исключают те его корни, при которых обращается в нуль общий знаменатель дробей;

5) записывают ответ.

III. Задание на уроке

№ 77 (а, б); 80 (в, г); 82; 85; 90; 92 (а); 94 (б); 95 (а); 96 (б); 97 (а); 99 (б); 107 (а); 110 (б); 112 (а); 114 (а, б); 115; 118.

IV. Задание на дом

№ 77 (в, г); 80 (а, б); 83; 86; 91; 92 (б); 94 (г); 95 (в); 96 (г); 97 (в); 99 (а); 108 (б); 110 (а); 112 (б); 114 (в, г); 116; 119.

V. Подведение итогов урока

Урок 104. Степень с целым показателем. Квадратный корень

Цель: решение типичных задач по теме.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение материала

Если $a \neq 0$ и n – целое отрицательное число, то $a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}$. Выражение 0^n при целом отрицательном n и при $n = 0$ не имеет смысла. Выражение $0^n = 0$ при натуральном n.

Свойства степени с целым показателем

Для любого $a \neq 0$ и любых целых m и n:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

2) $a^m : a^n = a^{m-n}$;

3) $(a^m)^n = a^{mn}$.

Для любых $a \neq 0$, $b \neq 0$ и любого целого n:

4) $(ab)^n = a^n b^n$;

5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.

Арифметическим **квадратным корнем** из неотрицательного числа a называют такое неотрицательное число b, квадрат которого равен a. Таким образом, $\sqrt{a} = b$, если $b^2 = a$ (при этом $a \geq 0$ и $b \geq 0$).

Свойства квадратного корня

1) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ (для $a \geq 0$, $b \geq 0$);

2) $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (для $a \geq 0$, $b > 0$);

3) $\sqrt{a^2} = |a|$;

4) $(\sqrt{a})^2 = a$ (для $a \geq 0$).

Модулем числа a называют само число a, если число a неотрицательное, и число $-a$, если число a отрицательное. Таким образом,

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0, \\ -a \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

III. Задание на уроке

№ 124 (а, б); 125 (а); 127 (б); 129 (а, б); 131; 134 (а, б); 136 (в, г); 137 (а); 138 (б); 139 (а, б); 140 (в).

IV. Задание на дом

№ 124 (в, г); 125 (б); 127 (г); 129 (в, г); 132; 134 (в, г); 136 (а, б); 137 (б); 138 (а); 139 (в, г); 140 (г).

V. Подведение итогов урока

Урок 105. Неравенства

Цель: решение типичных задач по теме.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение материала

Решением неравенства с одной переменной называется значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство. Решить неравенство – значит найти все его решения или доказать, что решений нет. Неравенства, имеющие одни и те же решения (или не имеющие решений), называются **равносильными**.

Свойства равносильности неравенств

1) Если из одной части неравенства перенести в другую член с противоположным знаком, то получится равносильное ему неравенство.

2) Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится равносильное ему неравенство.

Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится равносильное ему неравенство.

Линейные неравенства – неравенства вида $ax > b$ или $ax < b$ (где a и b – некоторые числа).

Решением системы неравенств с одной переменной называется значение переменной, при котором верно каждое из неравенств системы. **Решить систему** – значит найти все ее решения или доказать, что решений нет.

Если в левой части неравенства стоит квадратный трехчлен, а в правой – нуль, то такое неравенство называют квадратным.

Квадратичная функция задается формулой $y = ax^2 + bx + c$ (где $a \neq 0$). Поэтому **решение квадратного неравенства** сводится к отысканию нулей квадратичной функции и промежутков, на которых функция принимает положительные или отрицательные значения.

Для решения квадратного неравенства с помощью графика нужно:

1) **определить направление ветвей параболы** по знаку старшего коэффициента квадратичной функции;

2) **найти корни** соответствующего квадратного уравнения или определить, что их нет;

3) **построить эскиз графика** квадратичной функции, используя точки пересечения (или касания) с осью Ox (если они есть);

4) **по графику определить промежутки**, на которых функция принимает нужные значения.

При решении неравенств часто используется **метод интервалов.** Для этого нужно:

1) **найти корни** рассматриваемого многочлена;

2) **отметить эти корни** (с учетом их кратности) **на числовой оси;**

3) в любой точке (не совпадающей с корнями) **определить знак многочлена**;

4) **построить диаграмму знаков** многочлена;

5) **выписать промежутки**, на которых многочлен принимает нужные значения.

III. Задание на уроке

№ 141 (а); 142 (а, б); 143 (в, г); 144 (а); 146 (а); 148 (а, б); 150 (в, г); 153 (а, б); 155 (в, г); 157 (б, в); 158 (а).

IV. Задание на дом

№ 141 (в); 142 (в, г); 143 (а, б); 145 (а); 146 (б); 148 (в, г); 150 (а, б); 153 (в, г); 155 (а, б); 157 (а, г); 158 (б).

V. Подведение итогов урока

Уроки 106–107. Итоговая контрольная работа

Цель: контроль знаний по всем темам курса по однотипным вариантам.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Проведение контрольной работы

В заключение обучения проводится итоговая контрольная работа. Предлагаются два одинаковых по сложности варианта. На наш взгляд, использование при подведении итогов вариантов разной сложности нецелесообразно и некорректно. В одинаковых условиях проще и этичнее сопоставить результаты и успехи учащихся. При окончательном подведении итогов, разумеется, необходимо учитывать все результаты обучения (оценки за контрольные мероприятия, сложность решаемых задач, активность на уроках и т. д.).

III. Критерии оценки работы

Вариант традиционно содержит шесть задач примерно одинаковой сложности. Поэтому рекомендуем использовать те же критерии при оценке, что и для вариантов 1 и 2 контрольных работ при текущем обучении. Оценка «5» ставится за пять решенных задач, оценка «4» – за четыре задачи, оценка «3» – за три задачи. Одна задача является резервной и дает некоторую свободу выбора.

IV. Варианты контрольной работы

Вариант 1

1. Упростите выражение $\left(\frac{6}{a^2-9}+\frac{1}{3-a}\right)\cdot\frac{a^2+6a+9}{5}$ и найдите его значение при $a=-4$.

2. Выполните действия: $(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2+\sqrt{24}(6-5\sqrt{6})$.

3. При каких значениях x функция $y=\frac{3x-2}{4}-\frac{5x+1}{2}$ принимает положительные значения?

4. Сократите дробь $\frac{3x^2-4x-4}{2-x}$.

5. Поезд должен был пройти 420 км за определенное время. Однако по техническим причинам выехал на 30 мин позже. Чтобы прибыть вовремя, он увеличил скорость на 2 км/ч. Какова была скорость поезда?

6. При каких значениях a уравнение $\frac{x^2-(4a+3)x+3a^2+3a}{x-1}=0$

а) имеет один корень;

б) имеет только отрицательные корни?

Вариант 2

1. Упростите выражение $\left(\frac{4}{a^2-4}+\frac{1}{2-a}\right)\cdot\frac{a^2+4a+4}{3}$ и найдите его значение при $a=-2{,}3$.

2. Выполните действия: $(4\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2+\sqrt{54}(8-7\sqrt{6})$.

3. При каких значениях x функция $y=\frac{2x+3}{4}-\frac{6x-5}{3}$ принимает отрицательные значения?

4. Сократите дробь $\frac{2x^2-5x-3}{3-x}$.

5. Из одного пункта в другой выехали велосипедист и мотоциклист. Скорость мотоциклиста на 10 км/ч больше скорости велосипедиста, поэтому он затратил на путь на 6 ч меньше. Какова скорость мотоциклиста?

6. При каких значениях a уравнение $\frac{x^2-(3a+3)x+2a^2+3a}{x-2}=0$

а) имеет один корень;

б) имеет только положительные корни?

IV. Разбор вариантов работы

Целесообразно вывесить на стенде разбор заданий работы.

Вариант 1

1. Приведем дроби в скобках к общему знаменателю и сложим их. Учтем формулу квадрата суммы чисел. Получаем: $\left(\frac{6}{a^2-9}+\frac{1}{3-a}\right)\cdot\frac{a^2+6a+9}{5}=\left(\frac{6}{(a-3)(a+3)}-\frac{1}{a-3}\right)\cdot\frac{(a+3)^2}{5}=$

$=\frac{6-a-3}{(a-3)(a+3)}\cdot\frac{(a+3)^2}{5}=\frac{(3-a)(a+3)^2}{(a-3)(a+3)5}=-\frac{a+3}{5}$. Найдем значение этого выражения при $a=-4$ и получим: $-\frac{-4+3}{5}=\frac{1}{5}=0,2$.

Ответ: $-\frac{a+3}{5}$; 0,2.

2. Учтем свойства квадратных корней и формулу квадрата разности чисел.

Имеем: $(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2+\sqrt{24}(6-5\sqrt{6})=(2\sqrt{3})^2-2\cdot2\sqrt{3}\cdot3\sqrt{2}+(3\sqrt{2})^2+$ $+2\sqrt{6}(6-5\sqrt{6})=12-12\sqrt{6}+18+12\sqrt{6}-60=-30$.

Ответ: -30.

3. Преобразуем данную функцию. Для этого приведем дроби к общему знаменателю и найдем их разность. Получаем: $y=\frac{3x-2}{4}-\frac{5x+1}{2}=\frac{3x-2-2(5x+1)}{4}=\frac{3x-2-10x-2}{4}=\frac{-7x-4}{4}$.

Так как функция принимает положительные значения, то имеем неравенство $\frac{-7x-4}{4}>0$, или $-7x-4>0$, или $-4>7x$, откуда $-\frac{4}{7}>x$.

Ответ: $x<-\frac{4}{7}$.

4. Для сокращения дроби разложим ее числитель на множители, найдя корни квадратного трехчлена.

Получаем: $3x^2-4x-4= \;=3(x-2)\left(x+\frac{2}{3}\right)=(x-2)(3x+2)$ (т. к.

корни квадратного трехчлена $x_1 = 2$ и $x_2 = -\frac{2}{3}$). Тогда дробь имеет вид $\frac{3x^2-4x-4}{2-x} = \ = \frac{(x-2)(3x+2)}{2-x} = -3x-2.$

Ответ: $-3x-2$.

5. Пусть x км/ч – реальная скорость поезда, тогда планируемая скорость – $(x-2)$ км/ч. Расстояние 420 км поезд проехал за время $\frac{420}{x}$ ч, должен был проехать за время $\frac{420}{x-2}$ ч. По условию задачи получаем уравнение $\frac{420}{x-2} = \frac{1}{2} + \frac{420}{x}$. Умножим все члены уравнения на $2(x-2)x$. Имеем: $420 \cdot 2x = x(x-2) + 420 \cdot 2(x-2)$, или $840x = x^2 - 2x + 840x - 1680$, или $x^2 - 2x - 1680 = 0$. Корни этого уравнения $x_1 = 42$ и $x_2 = -40$ (не подходит). Итак, реальная скорость поезда 42 км/ч.

Ответ: 42 км/ч.

6. Сначала решим уравнение $\frac{x^2-(4a+3)x+3a^2+3a}{x-1} = 0$. Дробь равна нулю, если ее числитель $x^2-(4a+3)x+3a^2+3a = 0$, а знаменатель $x-1 \neq 0$. Решим квадратное уравнение. Найдем его дискриминант $D = (4a+3)^2 - 4(3a^2+3a) = 16a^2+24a+9-12a^2-12a =$ $= 4a^2+12a+9 = (2a+3)^2$. Тогда корни уравнения $x_{1,2} = \frac{4a+3 \pm (2a+3)}{2}$, т. е. $x_1 = a$ и $x_2 = 3a+3$.

а) Если данное уравнение имеет один корень, то другой корень равен запрещенному значению $x = 1$. Поэтому или $a = 1$, или $3a+3 = 1$ (т. е. $a = -\frac{2}{3}$). Итак, при $a = 1$ и $a = -\frac{2}{3}$ данное уравнение имеет один корень.

б) Если уравнение имеет отрицательные корни, то выполняются неравенства $\begin{cases} a < 0, \\ 3a+3 < 0. \end{cases}$ Решение этой системы неравенств $a < -1$.

Ответ: а) $a = 1$ и $a = -\frac{2}{3}$; б) $a < -1$.

Вариант 2

1. Приведем дроби в скобках к общему знаменателю и сложим их. Учтем формулу квадрата суммы чисел. Получаем:

$$\left(\frac{4}{a^2-4}+\frac{1}{2-a}\right)\cdot\frac{a^2+4a+4}{3}=\left(\frac{4}{(a-2)(a+2)}-\frac{1}{a-2}\right)\cdot\frac{(a+2)^2}{3}=$$

$$=\frac{4-a-2}{(a-2)(a+2)}\cdot\frac{(a+2)^2}{3}=\frac{(2-a)(a+2)^2}{(a-2)(a+2)3}=-\frac{a+2}{3}.$$ Найдем значение этого выражения при $a=-2{,}3$ и получим: $-\frac{-2{,}3+2}{3}=\frac{0{,}3}{3}=0{,}1.$

Ответ: $-\frac{a+2}{3}$; 0,1.

2. Учтем свойства квадратных корней и формулу квадрата разности чисел.

Имеем: $(4\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2+\sqrt{54}(8-7\sqrt{6})=(4\sqrt{3})^2-2\cdot4\sqrt{3}\cdot3\sqrt{2}+(3\sqrt{2})^2+$ $+3\sqrt{6}(8-7\sqrt{6})=48-24\sqrt{6}+18+24\sqrt{6}-126=-60.$

Ответ: −60.

3. Преобразуем данную функцию. Для этого приведем дроби к общему знаменателю и найдем их разность. Получаем:

$$y=\frac{2x+3}{4}-\frac{6x-5}{3}=\frac{3(2x+3)-4(6x-5)}{12}=\frac{6x+9-24x+20}{12}=\frac{-18x+29}{12}.$$

Так как функция принимает отрицательные значения, то имеем неравенство $\frac{-18x+29}{12}<0$, или $-18x+29<0$, или $29<18x$, откуда $\frac{29}{18}<x.$

Ответ: $x>\frac{29}{18}$.

4. Для сокращения дроби разложим ее числитель на множители, найдя корни квадратного трехчлена.

Получаем: $2x^2-5x-3=\ =2(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right)=(x-3)(2x+1)$ (т. к.

корни квадратного трехчлена $x_1 = 3$ и $x_2 = -\frac{1}{2}$). Тогда дробь имеет

вид $\frac{2x^2-5x-3}{3-x} = \ = \frac{(x-3)(2x+1)}{3-x} - -2x-1.$

Ответ: $-2x - 1$.

5. Пусть x км/ч – скорость мотоциклиста, тогда скорость велосипедиста – $(x - 10)$ км/ч. Расстояние 120 км мотоциклист проехал за время $\frac{120}{x}$ ч, велосипедист – за время $\frac{120}{x-10}$ ч. По условию задачи получаем уравнение $\frac{120}{x-10} = \frac{120}{x} + 6$. Умножим все члены уравнения на $\frac{1}{6}(x-10)x$. Имеем: $20x = 20(x - 10) + (x - 10)x$, или $20x = 20x - 200 + x^2 - 10x$, или $x^2 - 10x - 200 = 0$. Корни этого уравнения $x_1 = 20$ и $x_2 = -10$ (не подходит). Итак, скорость мотоциклиста 20 км/ч.

Ответ: 20 км/ч.

6. Сначала решим уравнение $\frac{x^2-(3a+3)x+2a^2+3a}{x-2} = 0$. Дробь равна нулю, если ее числитель $x^2-(3a+3)x+2a^2+3a = 0$, а знаменатель $x - 2 \neq 0$. Решим квадратное уравнение. Найдем его дискриминант $D = (3a+3)^2 - 4(2a^2+3a) = 9a^2+18a+9-8a^2-12a = = a^2+6a+9 = (a+3)^2$. Тогда корни уравнения $x_{1,2} = \frac{3a+3 \pm (a+3)}{2}$, т. е. $x_1 = a$ и $x_2 = 2a + 3$.

а) Если данное уравнение имеет один корень, то другой корень равен запрещенному значению $x = 2$. Поэтому или $a = 2$, или $2a + 3 = 2$ (т. е. $a = -\frac{1}{2}$). Итак, при $a = 2$ и $a = -\frac{1}{2}$ данное уравнение имеет один корень.

б) Если уравнение имеет положительные корни, то выполняются неравенства $\begin{cases} a > 0, \\ 2a+3 > 0. \end{cases}$ Решение этой системы неравенств $a > 0$.

Ответ: а) $a = 1$ и $a = -\frac{1}{2}$; б) $a > 0$.

Урок 108. Подведение итогов обучения

***Цель*:** ознакомить учащихся с результатами обучения и программой на следующий год.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Результаты итоговой контрольной работы

1. Оглашение оценок за контрольную работу.
2. Основные ошибки в задачах.
3. Разбор задач контрольной работы (вывешен на стенде).

III. Итоги учебного года

1. **Сообщение годовых оценок по алгебре** (похвалить отлично и хорошо успевающих школьников; обратить внимание на слабые места менее успевающих учеников и дать рекомендации по их преодолению).

2. **Особенности прошедшего учебного года** (отметить темы, усвоенные хорошо, и темы, вызвавшие трудности; обратить внимание на необходимость дальнейшего развития навыков построения графиков функций, решения уравнений и неравенств).

IV. Планы на следующий учебный год

1. Развитие тем, изучаемых в 7, 8 классах (построение графиков функций; решение нелинейных уравнений и неравенств; систем уравнений и т.д.)
2. Изучение новых тем (арифметическая и геометрическая прогрессии; тригонометрические функции и преобразования тригонометрических выражений).
3. Подготовка к экзамену по алгебре.

V. Поздравления с окончанием учебного года и началом каникул, пожелания на следующий учебный год.

Литература

1. Алимов Ш.А. и др. Алгебра: учебник для 8 класса. – М.: Просвещение, 2006.

2. Белов А.С., Комаров А.А., Рурукин А.Н. Решение задач по математике: алгебра и геометрия: для учащихся 8 класса. – М.: МИФИ, 2004.

3. Гусев В.А., Мордкович А.Г. Математика: справочные материалы. – М.: Просвещение, 1988.

4. Жохов В.И., Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г. Дидактические материалы по алгебре для 8 класса. – М.: Просвещение, 2001.

5. Звавич Л.И., Шляпочник Л.Я., Козулин Б.В. Контрольные и проверочные работы по алгебре (8 класс). – М.: Дрофа, 2001.

6. Кострикина Н.П. Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7–9 классов (книга для учителя). – М.: Просвещение, 1991.

7. Кузнецова Л.В. и др. Алгебра: сборник заданий для подготовки к итоговой аттестации в 9 классе. – М.: Просвещение, 2007.

8. Макарычев Ю.Н. и др. Алгебра: учебник для 8 класса. – М.: Просвещение, 2003.

9. Максимовская М.А., Уединов А.В., Чулков П.В. Тесты по алгебре для 8 класса. – М.: Издат-школа, 2006.

10. Мордкович А.Г. Алгебра: учебник для 8 класса. – М.: Мнемозина, 2008.

11. Мордкович А.Г. и др. Алгебра: задачник для 8 класса. – М.: Мнемозина, 2008.

12. Мочалов В.В., Сильвестров В.В. Уравнения и неравенства с параметрами. – Чебоксары: Чувашский университет, 2000.

13. Рурукин А.Н. Математика: пособие для интенсивной подготовки к экзаменам по математике. – М.: Вако, 2006.

14. Рурукин А.Н. Поурочные разработки по алгебре к учебникам Ю.Н. Макарычева и Ш.А. Алимова. – М.: Вако, 2008.

15. Цыпкин А.Г., Пинский А.И. Справочное пособие по методам решения задач по математике для средней школы. – М.: Наука, 1983.

16. Шуба М.Ю. Занимательные задания в обучении математике (книга для учителя). – М.: Просвещение, 1994.

Содержание

Учебно-методическое пособие

В ПОМОЩЬ ШКОЛЬНОМУ УЧИТЕЛЮ

Рурукин Александр Николаевич
Сочилов Станислав Вячеславович
Зеленский Юрий Максимович

ПОУРОЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ ПО АЛГЕБРЕ

к УМК А.Г. Мордковича (*М.: Мнемозина*)

8 класс

Выпускающий редактор *Ольга Володченкова*
Дизайн обложки *Анны Новиковой*

По вопросам приобретения книг издательства «ВАКО»
обращаться в ООО «Образовательный проект»
по телефонам: 8 (495) 778-58-27, 746-15-04. Сайт: www.obrazpro.ru

Приглашаем к сотрудничеству авторов.
Телефон: 8 (495) 507-33-42. Сайт: www.vaco.ru

Налоговая льгота –
Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93-953000.
Издательство «ВАКО»

Подписано к печати с диапозитивов 06.04.2010.
Формат 84×108/32. Печать офсетная. Гарнитура Newton.
Усл. печ. листов 18,48. Тираж 10 000 экз. Заказ № 1833.

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных материалов в ОАО «Дом печати – ВЯТКА»
610033, г. Киров, ул. Московская, 122
Факс: (8332) 53-53-80, 62-10-36
http://www.gipp.kirov.ru, e-mail: pto@gipp.kirov.ru